

Incidência Fiscal: a Regra das Elasticidades, por Cálculo

Apêndice opcional à aula *Equilíbrio, Impostos e Subsídios* (LN09)

Índice

1	O ponto de partida: o equilíbrio com imposto	1
2	Os montantes de incidência	2
3	Diferenciar a condição de equilíbrio	2
4	De declives a elasticidades	3
5	Resolver o sistema	3
6	Casos-limite	3
7	Verificação no exemplo da aula	4
8	Nota final	4

Este apêndice é **opcional**. Na aula, a regra das elasticidades da incidência fiscal, $|\varepsilon_D| I_C = \varepsilon_S I_P$, foi apresentada como um corolário e verificada num exemplo. Aqui **demonstramos** o resultado em geral, diferenciando a condição de equilíbrio. É para quem quiser ver de onde vem a fórmula, ao pormenor. O exame não exige esta derivação.

1 O ponto de partida: o equilíbrio com imposto

Um imposto específico de t euros por unidade abre um *tax wedge* entre o preço pago pelo consumidor, P_C , e o preço recebido pelo produtor, P_P :

$$P_C = P_P + t.$$

No equilíbrio, a quantidade procurada ao preço do consumidor iguala a quantidade oferecida ao preço do produtor:

$$Q_D(P_C) = Q_S(P_P).$$

Estas duas condições determinam P_C e P_P para cada valor de t . Podemos por isso pensar nos dois preços como **funções do imposto**, $P_C(t)$ e $P_P(t)$, com o caso sem imposto como ponto de partida:

$$P_C(0) = P_P(0) = P^*, \quad Q_D(P^*) = Q_S(P^*) = Q^*.$$

A pergunta da incidência é: quando t sobe um pouco, **quanto** sobe P_C e quanto desce P_P ?

2 Os montantes de incidência

Começemos pela intuição das derivadas dos preços em ordem ao imposto. A derivada

$$\frac{dP_C}{dt}$$

responde a: quando o imposto aumenta 1 euro, **quanto sobe o preço do consumidor?** É, portanto, a **fração de cada euro de imposto** que passa para o consumidor. Analogamente, $-\frac{dP_P}{dt}$ é a fração que recai sobre o produtor (o sinal negativo porque P_P **desce** com o imposto).

As duas frações somam 1. Basta diferenciar o *wedge* $P_C(t) = P_P(t) + t$ em ordem a t :

$$\frac{dP_C}{dt} = \frac{dP_P}{dt} + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dP_C}{dt} + \left(-\frac{dP_P}{dt}\right) = 1.$$

Para chegar aos **montantes** da aula, em euros por unidade, basta multiplicar as frações pelo imposto total t :

$$I_C \equiv \frac{dP_C}{dt} t \quad \text{e} \quad I_P \equiv -\frac{dP_P}{dt} t,$$

e, multiplicando a identidade das frações por t :

$$I_C + I_P = t.$$

Os t euros do imposto repartem-se **exatamente** entre os dois lados: o que o consumidor não suporta, suporta-o o produtor (no exemplo da aula, $3 + 2 = 5$). Falta saber **em que proporção**, e é aí que entra a condição de equilíbrio.

3 Diferenciar a condição de equilíbrio

A condição $Q_D(P_C(t)) = Q_S(P_P(t))$ vale para todos os valores de t : os dois lados são a mesma função de t , logo as suas derivadas também são iguais. Pela regra da cadeia, em $t = 0$:

$$Q'_D(P^*) \cdot \frac{dP_C}{dt} = Q'_S(P^*) \cdot \frac{dP_P}{dt}.$$

Multiplicando ambos os lados por t , aparecem os montantes de incidência:

$$Q'_D(P^*) I_C = Q'_S(P^*) \cdot (-I_P) \quad \Longleftrightarrow \quad Q'_D(P^*) I_C = -Q'_S(P^*) I_P.$$

Esta igualdade já contém todo o resultado, mas está escrita em **declives** (Q'_D e Q'_S), que dependem das unidades. O passo final converte-a para elasticidades: é só uma questão de multiplicar e dividir convenientemente por P^*/Q^* .

4 De declives a elasticidades

As elasticidades no equilíbrio são os declives multiplicados por P^*/Q^* :

$$\varepsilon_D = Q'_D(P^*) \frac{P^*}{Q^*} < 0, \quad \varepsilon_S = Q'_S(P^*) \frac{P^*}{Q^*} > 0.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade anterior por P^*/Q^* (um número positivo, que não altera a igualdade):

$$\varepsilon_D I_C = -\varepsilon_S I_P.$$

Como $\varepsilon_D < 0$, temos $\varepsilon_D = -|\varepsilon_D|$, e os sinais negativos cancelam:

$$|\varepsilon_D| I_C = \varepsilon_S I_P$$

É exatamente a regra enunciada na aula: os montantes de incidência são **inversamente proporcionais** às elasticidades dos respetivos lados.

5 Resolver o sistema

Juntando as duas equações,

$$|\varepsilon_D| I_C = \varepsilon_S I_P \quad \text{e} \quad I_C + I_P = t,$$

substituímos $I_P = t - I_C$ na primeira e resolvemos:

$$|\varepsilon_D| I_C = \varepsilon_S (t - I_C) \implies I_C (|\varepsilon_D| + \varepsilon_S) = \varepsilon_S t,$$

$$I_C = \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_S + |\varepsilon_D|} t \quad \text{e} \quad I_P = \frac{|\varepsilon_D|}{\varepsilon_S + |\varepsilon_D|} t.$$

Repare-se na leitura cruzada: o montante do **consumidor** tem no numerador a elasticidade da **oferta**, e vice-versa. Cada lado suporta tanto mais quanto **menos elástico** for: quem não consegue fugir do mercado fica com a conta.

6 Casos-limite

A fórmula recupera todos os casos extremos discutidos na aula:

Caso	Elasticidades	I_C	I_P
Procura perfeitamente inelástica	$ \varepsilon_D \rightarrow 0$	t	0
Procura perfeitamente elástica	$ \varepsilon_D \rightarrow \infty$	0	t
Oferta perfeitamente inelástica	$\varepsilon_S \rightarrow 0$	0	t
Oferta perfeitamente elástica	$\varepsilon_S \rightarrow \infty$	t	0
Elasticidades iguais	$ \varepsilon_D = \varepsilon_S$	$t/2$	$t/2$

7 Verificação no exemplo da aula

Na aula usámos $Q_D = 100 - 2P$ e $Q_S = 3P - 20$, com equilíbrio sem imposto $P^* = 24$, $Q^* = 52$, e um imposto $t = 5$ que dá $P_C = 27$ e $P_P = 22$: o consumidor suporta $I_C = 3$ euros e o produtor $I_P = 2$ euros.

Pela fórmula: $Q'_D = -2$ e $Q'_S = 3$, logo

$$|\varepsilon_D| = 2 \cdot \frac{24}{52} = \frac{48}{52}, \quad \varepsilon_S = 3 \cdot \frac{24}{52} = \frac{72}{52},$$

$$I_C = \frac{72/52}{72/52 + 48/52} \times 5 = \frac{72}{120} \times 5 = 3, \quad I_P = \frac{48}{120} \times 5 = 2. \checkmark$$

Repare-se que com curvas **lineares** os declives são constantes, pelo que a expansão de primeira ordem é **exata** para qualquer dimensão do imposto (e o fator P^*/Q^* cancela: com curvas lineares, $I_C = \frac{3}{3+2} t$ sai diretamente dos declives). Para curvas gerais, o resultado é **local**: vale como aproximação de primeira ordem, tanto melhor quanto mais pequeno for t .

8 Nota final

A mesma derivação funciona, sem alterações, para o **subsídio**: basta substituir t por $-s$. As frações de quem **beneficia** do subsídio são as mesmas I_C e I_P , com o lado mais inelástico a capturar a maior parte do benefício, em espelho perfeito do imposto.