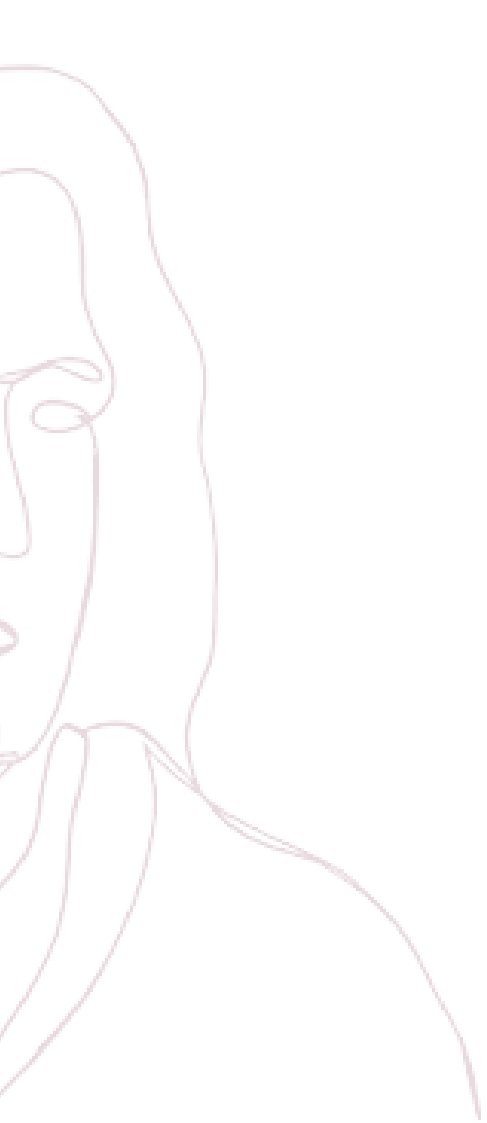




Microeconomia

Consumo Intertemporal



Tópicos de Hoje

- O tempo como uma dimensão nova: consumir hoje ou consumir amanhã
- Construir a restrição orçamental intertemporal, passo a passo
- Poupar e pedir emprestado, vistos como um só mecanismo
- Uma utilidade com desconto do futuro (o fator β) e a tangência da aula anterior, aplicados ao tempo
- Poupador ou devedor? E o que muda quando a taxa de juro sobe

Parte 1: A Restrição Orçamental Intertemporal





Onde Ficámos

Nas últimas aulas, o consumidor resolveu sempre o mesmo problema: distribuir um rendimento W entre **dois bens diferentes**, x_1 e x_2 , **no mesmo momento**.

Repara numa coisa que nunca dissemos explicitamente: em todo esse problema, **não havia tempo**. Era uma fotografia, um instante único.

Hoje introduzimos o tempo pela primeira vez. 



Uma Dimensão Que Faltava

E se, em vez de dois bens, tivermos o **mesmo bem** (“consumo”, em euros) disponível em **dois momentos diferentes**?

Chamamos c_1 ao consumo **hoje** (período 1) e c_2 ao consumo **amanhã** (período 2).

Para manter tudo simples, vamos ficar só com **dois períodos**. As ideias generalizam-se para mais períodos, mas a intuição toda já aparece com dois. 🙌

O Cenário Mais Simples: Sem Banco

Suponha que a Maria recebe W_1 euros hoje e sabe que vai receber W_2 euros amanhã. Não existe nenhum banco, nenhuma forma de guardar ou adiantar dinheiro.

Neste mundo, a escolha está feita antes de começar: $c_1 = W_1$ e $c_2 = W_2$. Não há problema de otimização nenhum, porque não há **alternativa**. 😐

Para termos um problema de escolha interessante, precisamos de uma forma de **mover recursos entre períodos**.



Introduzindo o Banco

Suponha agora que existe um banco onde a Maria pode **poupar** ou **pedir emprestado**, à mesma taxa de juro r .

Chamamos S à poupança do período 1: $S = W_1 - c_1$.

- $S > 0$: a Maria consome menos do que recebe hoje e **poupa** a diferença.
- $S < 0$: a Maria consome mais do que recebe hoje, ou seja, **pede emprestado**.

Poupar e pedir emprestado são, matematicamente, **a mesma operação** com sinal trocado. 💡

1 Passo 1: O Que Sobra Para o Período 2

No período 2, a Maria recebe W_2 , mais o que guardou no banco, já com juros.

$$c_2 = W_2 + (1 + r) S$$

Se $S > 0$ (poupou), o banco devolve o capital mais juros: mais consumo amanhã. Se $S < 0$ (pediu emprestado), tem de devolver capital mais juros: menos consumo amanhã. A fórmula funciona nos dois casos. 

2 Passo 2: Substituir S

Sabemos que $S = W_1 - c_1$. Substituindo em $c_2 = W_2 + (1 + r)S$:

$$c_2 = W_2 + (1 + r)(W_1 - c_1)$$

Agora c_2 está escrito em função de c_1 e das constantes W_1, W_2, r : exatamente o mesmo tipo de manobra que já fizemos com a restrição orçamental estática. 

3 Passo 3: Rearranjar

Distribuindo o $(1 + r)$ e reagrupando os termos em c_1 e c_2 de um lado:

$$c_2 = W_2 + (1 + r)W_1 - (1 + r)c_1$$

$$\Rightarrow (1 + r)c_1 + c_2 = (1 + r)W_1 + W_2$$

Esta é a restrição intertemporal em **valor futuro**: tudo medido em euros do período 2.

4 Passo 4: Passar Para Valor Presente

Dividindo tudo por $(1 + r)$:

$$c_1 + \frac{c_2}{1 + r} = W_1 + \frac{W_2}{1 + r}$$

Chamamos W ao lado direito, o **valor presente da riqueza** da Maria (o mesmo W de sempre, agora com um segundo período):

$$W = W_1 + \frac{W_2}{1 + r}$$

Ligando ao Que Já Conhecemos

Repara na forma da restrição: $c_1 + \frac{c_2}{1+r} = W$.

Compara com a restrição estática de sempre: $p_1x_1 + p_2x_2 = W$.

São **a mesma equação**, com $x_1 \rightarrow c_1$, $x_2 \rightarrow c_2$, $p_1 = 1$,

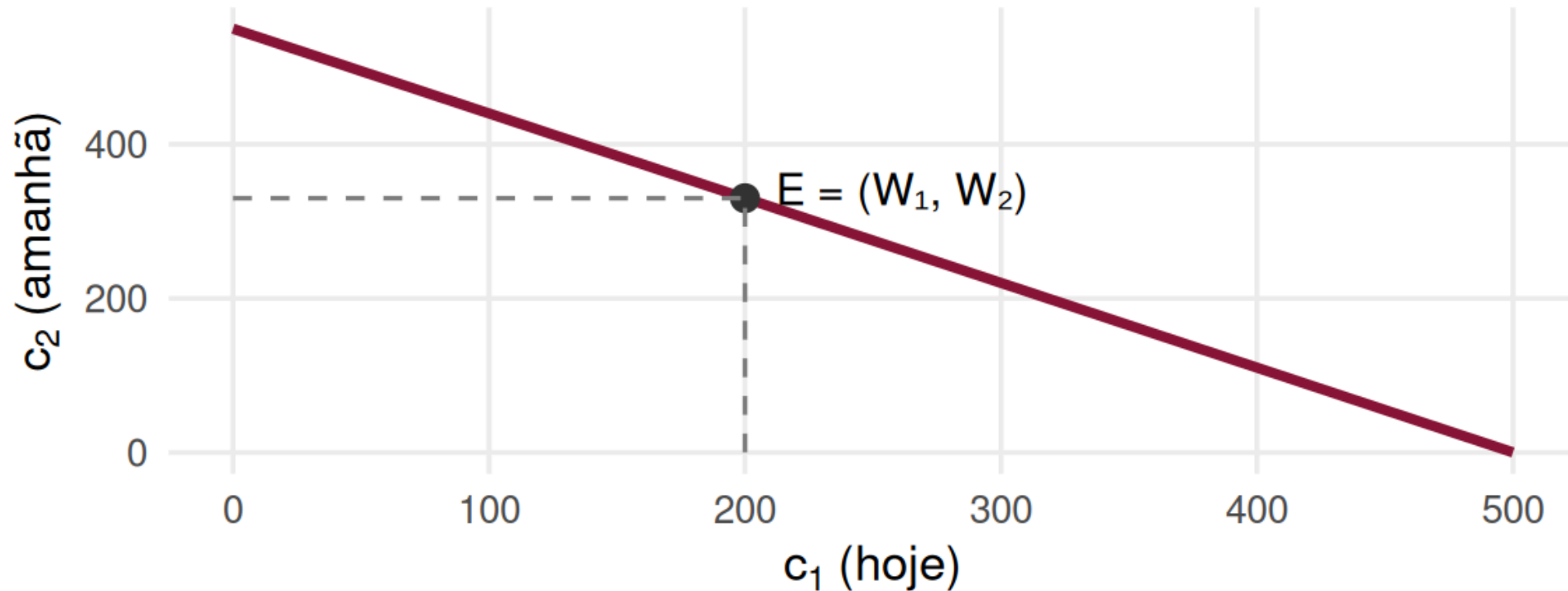
$p_2 = \frac{1}{1+r}$: é o mesmo W de sempre, só que agora soma dois períodos. 

Nada na matemática muda. Só a interpretação: o “preço” do consumo de amanhã, em euros de hoje, é $\frac{1}{1+r}$: o fator de desconto.



O Diagrama de Fisher

Representamos c_1 no eixo horizontal e c_2 no eixo vertical, tal como fazíamos com x_1 e x_2 .



O ponto $E = (W_1, W_2)$, a **dotação**, é o que a Maria consumiria sem banco nenhum.

A Dotação Está Sempre na Reta

Repara: se $c_1 = W_1$, a restrição dá $c_2 = W_2$ exatamente, **qualquer que seja r** .

Faz sentido: consumir exatamente o que se recebe em cada período não exige poupar nem pedir emprestado nada. É sempre uma opção disponível. 

Vamos usar este facto simples daqui a pouco: ele é a chave para perceber os efeitos de uma mudança em r .



O Declive da Reta

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = W \quad \Rightarrow \quad c_2 = (1+r)W - (1+r)c_1$$

O declive é $-(1+r)$: exatamente como $-p_1/p_2$ na restrição estática, com $p_1 = 1$ e $p_2 = 1/(1+r)$.

Interpretação: para consumir 1 euro a mais **hoje**, é preciso desistir de $(1+r)$ euros **amanhã**. É o custo de oportunidade de gastar hoje em vez de poupar. 💡

Poupar vs. Pedir Emprestado

Mover-se ao longo da reta, a partir de E :

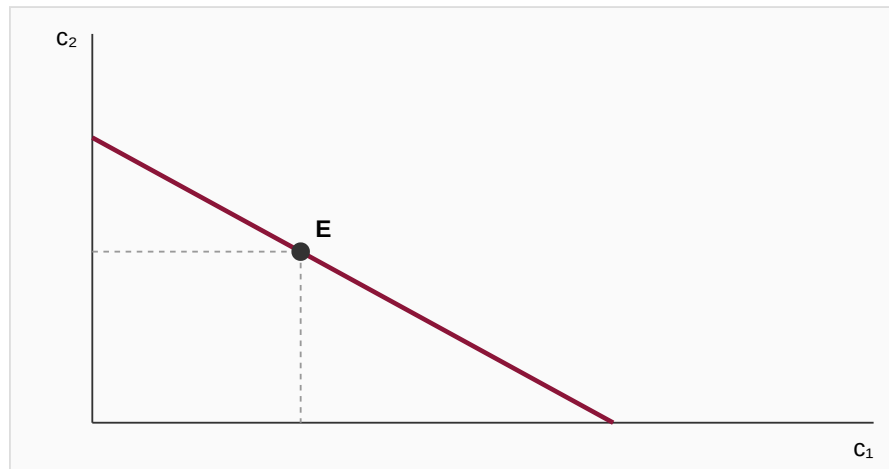
- Para a **esquerda** de E ($c_1 < W_1$): a Maria consome menos hoje do que recebe. É **poupadora** ($S = W_1 - c_1 > 0$).
- Para a **direita** de E ($c_1 > W_1$): a Maria consome mais hoje do que recebe. É **devedora** ($S < 0$).

O banco não muda o rendimento da Maria. Só lhe dá mais opções: pontos na reta que não são E . 



Experimenta: A Reta Orçamental

Arrasta W_1 , W_2 e r e vê a reta e a dotação mudarem. 



W_1 : 200



W_2 : 330



r : 10%



W (valor presente) = **500.0**

Questões de Revisão (Parte 1)

Pergunta 1

A restrição orçamental intertemporal $c_1 + \frac{c_2}{1+r} = W$ é estruturalmente igual a:

- a. $p_1 x_1 + p_2 x_2 = W$, com $p_1 = 1$, $p_2 = 1/(1+r)$
- b. $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$
- c. $|\text{TMS}| = p_1/p_2$
- d. $Q^D = a - bP$

✓ Pergunta 1 (Solução)

Solução

Resposta: a) A restrição intertemporal é a restrição orçamental estática do costume, com c_1, c_2 no lugar de x_1, x_2 e $1/(1 + r)$ como o “preço” do consumo futuro.

Pergunta 2

O ponto de dotação $E = (W_1, W_2)$:

- a. Só está na reta orçamental se a Maria poupar
- b. Desaparece se o banco fechar
- c. Está sempre na reta orçamental, qualquer que seja r
- d. É sempre o ponto ótimo escolhido

Resposta: c) Consumir exatamente (W_1, W_2) nunca exige poupar nem pedir emprestado, por isso é sempre uma opção acessível.

Pergunta 3 (Exercício)

A Mariana tem $W_1 = 400$ euros e $W_2 = 220$ euros. A taxa de juro é $r = 10\%$.

- a) Calcule a riqueza presente W .
- b) Qual o máximo que pode consumir em cada período?
- c) Se a Mariana decide consumir $c_1 = 300$ euros hoje, quanto poupa? E quanto consome amanhã?

✓ Pergunta 3 (Solução)

Solução

a) $W = 400 + \frac{220}{1,10} = 400 + 200 = 600$ euros.

b) Máximo hoje: $c_1^{\max} = 600$ euros. Máximo amanhã: $c_2^{\max} = 600 \times 1,10 = 660$ euros.

c) Poupa $S = 400 - 300 = 100$ euros. Amanhã: $c_2 = 220 + 100 \times 1,10 = 330$ euros.

Parte 2: A Escolha Ótima ao Longo do Tempo



A Utilidade Depende do Tempo

Se $U(x_1, x_2)$ mede a satisfação de consumir dois bens, $U(c_1, c_2)$ mede a satisfação de consumir num período ou noutro.

O método é o mesmo (curvas de indiferença, TMS, tangência).
Só trocámos os rótulos: onde líamos “pizza e salada”, lemos agora “hoje e amanhã”. Falta escolher uma forma de U que leia bem o tempo.   



Uma Utilidade Feita Para o Tempo

Para bens no mesmo instante usámos a Cobb-Douglas. Para consumo em dois momentos há uma forma ainda mais natural: **somar** a satisfação de cada período, **descontando** o futuro.

i Utilidade intertemporal

$$U(c_1, c_2) = \ln c_1 + \beta \ln c_2, \quad \beta > 0$$

$\ln$ é a satisfação de consumir em cada período (com utilidade marginal decrescente, como sempre). β pesa o **futuro** em relação ao presente.

É Uma Cobb-Douglas Disfarçada

A utilidade é ordinal, e $\exp$ é uma função crescente. Aplicando $\exp$ à nossa U :

$$e^U = e^{\ln c_1 + \beta \ln c_2} = c_1 \cdot c_2^\beta$$

É uma **Cobb-Douglas** com expoentes 1 e β . Logo $\ln c_1 + \beta \ln c_2$ representa exatamente as mesmas preferências que $c_1^1 c_2^\beta$. 

Podemos reutilizar tudo o que já sabemos da Cobb-Douglas. A forma logarítmica só torna a leitura do tempo mais transparente.



O Que Significa β ?

β é o **fator de desconto**: quanto vale, hoje, uma unidade de satisfação de amanhã.

- $\beta < 1$: **impaciente**. Damos menos peso ao futuro, 1 euro amanhã vale menos do que 1 euro hoje. É o caso normal: quase toda a gente prefere já.
- $\beta = 1$: indiferente entre hoje e amanhã.
- $\beta > 1$: **paciente**, valoriza mais o futuro (raro).

Por isso, tipicamente $\beta \in (0, 1]$. 💡



O Problema do Consumidor, Agora no Tempo

! O Problema do Consumidor Intertemporal

$$\max_{c_1, c_2} \ln c_1 + \beta \ln c_2 \quad \text{sujeito a} \quad c_1 + \frac{c_2}{1+r} = W$$

A restrição é a de sempre, com $p_1 = 1$ e $p_2 = 1/(1+r)$.

Resolvemos como na aula anterior: pela **tangência**, a 2ª lei de Gossen. 

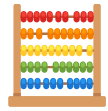
Resolver com a 2ª Lei de Gossen

A TMS desta utilidade: como $UMg_1 = \frac{1}{c_1}$ e $UMg_2 = \frac{\beta}{c_2}$,

$$|TMS| = \frac{UMg_1}{UMg_2} = \frac{c_2}{\beta c_1}$$

A tangência iguala $|TMS|$ ao declive da reta (em valor absoluto),
 $p_1/p_2 = 1 + r$:

$$\frac{c_2}{\beta c_1} = 1 + r \quad \Longrightarrow \quad c_2 = \beta(1 + r) c_1$$



Juntar à Restrição

Substituindo $c_2 = \beta(1 + r) c_1$ na restrição $c_1 + \frac{c_2}{1 + r} = W$:

$$c_1 + \underbrace{\frac{\beta(1 + r) c_1}{1 + r}}_{= \beta c_1} = W \quad \implies \quad (1 + \beta) c_1 = W$$

$$c_1^* = \frac{W}{1 + \beta}$$

$$c_2^* = \frac{\beta(1 + r) W}{1 + \beta}$$



As Procuras Intertemporais

i Consumo ótimo em cada período

$$c_1^* = \frac{W}{1 + \beta}$$

$$c_2^* = \frac{\beta(1 + r) W}{1 + \beta}$$

onde $W = W_1 + \frac{W_2}{1 + r}$

A fração da riqueza gasta hoje é $\frac{1}{1 + \beta}$: quanto mais impaciente (menor β), mais se consome no presente.

1 2 3 4 Exemplo Numérico

$W_1 = 200$, $W_2 = 330$, $r = 10\%$, $\beta = 0,25$ (bastante impaciente).

$$W = 200 + \frac{330}{1,10} = 200 + 300 = 500$$

$$c_1^* = \frac{500}{1,25} = 400 \quad c_2^* = \frac{0,25 \times 1,10 \times 500}{1,25} = 110$$

$c_1^* = 400 > W_1 = 200$: a Maria consome muito mais do que recebe hoje. É **devedora**, pede emprestado

$S = 200 - 400 = -200$ euros. 

A Condição Escondida de Euler

Reescreve a tangência $\frac{c_2}{\beta c_1} = 1 + r$ isolando o **crescimento do consumo**:

$$\boxed{\frac{c_2}{c_1} = \beta (1 + r)}$$

Duas forças em luta, impaciência (β) contra juro ($1 + r$):

- $\beta(1 + r) > 1$: o **juro** vence, $c_2 > c_1$ (consumo cresce).
- $\beta(1 + r) < 1$: a **impaciência** vence, $c_2 < c_1$ (consumo desce).
- $\beta(1 + r) = 1$: empate, $c_1 = c_2$.

Poupadora ou Devedora? Depende de β

Comparamos $c_1^* = \frac{W}{1 + \beta}$ com W_1 .

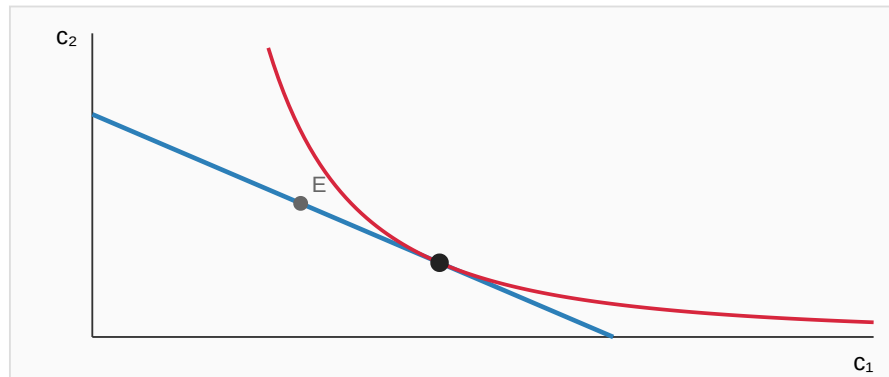
- Se $\frac{W}{1 + \beta} < W_1$: a Maria é **poupadora**.
- Se $\frac{W}{1 + \beta} > W_1$: a Maria é **devedora**.

Quanto mais **impaciente** (menor β), maior c_1^* , mais provável que peça emprestado para trazer consumo para o presente. Quanto mais **paciente** (maior β), mais provável que poupe. 



Experimenta: A Escolha Ótima

Arrasta os parâmetros. A curva de indiferença passa sempre pelo ponto ótimo. 



β (paciência): 0.50



r : 10%



W_1 : 200



W_2 : 330



$c_1^* = 333.3$ $c_2^* = 183.3$ **Devedora ($S = -133.3$)**



O Que Acontece Quando r Sobe?

Uma subida de r é, ao mesmo tempo, uma mudança de **preço relativo** (o “preço” de c_2 , $1/(1 + r)$, desce) e uma mudança de **riqueza**.

Aqui aparece uma ideia nova: qualquer mudança de preço traz sempre **dois efeitos** ao mesmo tempo, um **efeito substituição** e um **efeito rendimento**. Vamos conhecê-los agora, com uma vantagem: neste problema o efeito rendimento é **quase óbvio de ver**. 🙄

A Reta Roda em Torno de E

Lembra: $E = (W_1, W_2)$ está **sempre** na reta orçamental, seja qual for r .

Logo, quando r sobe, a reta não se desloca livremente: ela **roda em torno de E** , ficando mais inclinada (mais negativa).

Isto é diferente do problema estático: lá, quando p_1 muda, a reta roda em torno de uma interceção **abstrata** (W/p_2 , uma quantidade que ninguém possui). Aqui, roda em torno de um ponto **real**: o que a Maria já tem. 



Quem Ganha e Quem Perde

Se a reta roda em torno de E e fica mais inclinada, o que acontece aos dois lados de E ?

À esquerda de E (onde estão os poupadores): a nova reta passa **por cima** da antiga. Todas as escolhas de antes continuam disponíveis, e aparecem escolhas novas e melhores.

À direita de E (onde estão os devedores): a nova reta passa **por baixo** da antiga. Algumas escolhas de antes deixam de estar disponíveis.

Sem calcular nada, só de olhar para o desenho: **poupadores ganham, devedores perdem** com uma subida de r . 💡

✓ Confirmação Sem Cálculo: A Devedora do Exemplo

A Maria do exemplo ($\beta = 0,25$, $W_1 = 200$, $W_2 = 330$) escolheu $(c_1^*, c_2^*) = (400, 110)$ a $r = 10\%$. É devedora.

Se r subir para 20%, será que ainda pode pagar por $(400, 110)$?

$$400 + \frac{110}{1,20} = 400 + 91,67 = 491,67$$



A Devedora, Continuação

Mas a nova riqueza é só:

$$W = 200 + \frac{330}{1,20} = 475$$

Precisava de 491,67 mas só tem 475: **já não pode pagar a mesma escolha.** A devedora ficou pior. 

✓ Confirmação Sem Cálculo: Uma Poupadora

Agora um consumidor mais paciente, $\beta = 1,5$, $W_1 = 300$, $W_2 = 220$. A $r = 10\%$: $W = 500$, $c_1^* = 200$, $c_2^* = 330$. É poupador ($S = 100$).

Se r subir para 20%, ainda pode pagar por (200, 330)?

$$200 + \frac{330}{1,20} = 200 + 275 = 475$$



A Poupadora, Continuação

A nova riqueza é:

$$W = 300 + \frac{220}{1,20} = 483,33$$

Precisava só de 475 e tem 483,33: **sobra dinheiro**. O poupador ficou melhor. 



Dois Efeitos: Substituição e Rendimento

Efeito substituição: consumir hoje fica sempre mais “caro” em termos de oportunidade quando r sobe. Este efeito empurra sempre na mesma direção: $c_1 \downarrow$, $c_2 \uparrow$, para **qualquer** consumidor.

Efeito rendimento: depende de ser poupador ou devedor, como acabámos de ver. Poupador fica mais rico (c_1 tende a subir). Devedor fica mais pobre (c_1 tende a descer).



Resumindo os Dois Efeitos

	Efeito Substituição	Efeito Rendimento	Total em c_1
Poupador	$c_1 \downarrow$	$c_1 \uparrow$ (mais rico)	Ambíguo
Devedor	$c_1 \downarrow$	$c_1 \downarrow$ (mais pobre)	$c_1 \downarrow$ claro

Para o **devedor**, os dois efeitos apontam para o mesmo lado: o resultado é certo. Para o **poupador**, competem: o resultado depende de qual domina, mas sabemos pelo menos que ele não fica pior. 🔍



Questões de Revisão (Parte 2)

Pergunta 4

Com $U = \ln c_1 + \beta \ln c_2$, $\beta = 0,5$, $W_1 = 100$, $W_2 = 220$, $r = 10\%$, qual é c_1^* ?

- a. 150
- b. 250
- c. 300
- d. 200

✓ Pergunta 4 (Solução)

💡 Solução

$$W = 100 + 220/1,10 = 100 + 200 = 300. c_1^* = \frac{W}{1 + \beta} = \frac{300}{1,5} = 200. \text{ Resposta: d)}$$

Pergunta 5

Um consumidor devedor vê a taxa de juro subir. O que é certo acontecer?

- a. c_1 sobe, porque fica mais rico
- b. c_1 desce, porque efeito substituição e efeito rendimento apontam para o mesmo lado
- c. c_1 mantém-se, os efeitos cancelam-se
- d. Passa a ser poupador

Resposta: b) Para um devedor, a subida de r reduz c_1 tanto pelo efeito substituição como pelo efeito rendimento (fica mais pobre).

Pergunta 6 (Exercício)

Um consumidor tem $U = \ln c_1 + \beta \ln c_2$, $\beta = 1,5$, $W_1 = 300$, $W_2 = 220$, $r = 10\%$.

- a) Calcule a riqueza presente W .
- b) Determine (c_1^*, c_2^*) .
- c) É poupador ou devedor? Quanto poupa ou pede emprestado?

✓ Pergunta 6 (Solução)

💡 Solução

a) $W = 300 + \frac{220}{1,10} = 300 + 200 = 500$ euros.

b) $c_1^* = \frac{W}{1 + \beta} = \frac{500}{2,5} = 200$. $c_2^* = \frac{1,5 \times 1,10 \times 500}{2,5} = 330$.

c) $c_1^* = 200 < W_1 = 300$: é **poupador**, poupa $S = 300 - 200 = 100$ euros hoje.

? E a Seguir?

Hoje aplicámos exatamente o mesmo método (a Cobb-Douglas e a tangência da 2ª lei de Gossen) a um problema novo: distribuir consumo **ao longo do tempo** em vez de entre bens.

Esta ferramenta reaparece sempre que se fala em poupança, crédito, ou avaliação de investimentos: o valor presente W é a mesma ideia que sustenta o cálculo de obrigações e de VAL em finanças. 



Na Próxima Aula

Deixamos o consumidor e passamos para o outro lado do mercado, o **produtor**: como se decide quanto produzir, a partir da estrutura de custos.