

Microeconomia

Preferências e Taxa Marginal de Substituição



Tópicos de Hoje

1. ❤️ Preferências e Curvas de Indiferença
2. 🔄 Taxa Marginal de Substituição
3. 🎯 Função de Utilidade

Parte 1: Preferências



Das Possibilidades às Preferências

A restrição orçamental diz-nos **o que é possível** comprar.

Mas não nos diz **o que o consumidor prefere**. Para isso, precisamos de modelar as suas **preferências**.

Questão central: de entre todos os cabazes admissíveis, qual é o melhor?



A Notação das Preferências

Antes dos axiomas, três símbolos que vamos usar o semestre todo:

- $A \succ B$: o cabaz A é **estritamente preferido** a B
- $A \sim B$: o consumidor é **indiferente** entre A e B
- $A \succsim B$: o consumidor prefere A a B , **ou** é indiferente (pelo menos tão bom)



Os Três Axiomas das Preferências

Assumimos três axiomas sobre a forma como o consumidor compara cabazes:

- 1. Completude:** dados dois cabazes quaisquer A e B , o consumidor consegue sempre compará-los. Ou $A \succ B$, ou $B \succ A$, ou $A \sim B$.
- 2. Transitividade:** se $A \succ B$ e $B \succ C$, então $A \succ C$.
- 3. Não saciedade (Monotonicidade):** mais é melhor. Se o cabaz A tem pelo menos a mesma quantidade de ambos os bens que B , e mais de pelo menos um, então $A \succ B$.



Estes Axiomas Têm Nomes

Os dois primeiros axiomas definem o que em Economia se chama **racionalidade**:

Preferências **completas** e **transitivas** dizem-se **racionais**.

Racionalidade **não** é “fazer sempre a escolha certa”: é conseguir comparar quaisquer alternativas (completude) sem cair em contradições (transitividade).

O terceiro axioma já não é racionalidade: é uma hipótese sobre o que o consumidor deseja. Preferências racionais e monótonas dizem-se **bem comportadas**: são as que vamos usar.

Curvas de Indiferença

Os axiomas permitem representar as preferências através de **curvas de indiferença**.

Definição

Uma curva de indiferença é o conjunto de todos os cabazes que dão ao consumidor o **mesmo nível de satisfação**.



O Que Sabemos Só Com a Não Saciedade?

Toma um cabaz A . Compara-o com outro cabaz que tenha **mais x_1 e mais x_2** .

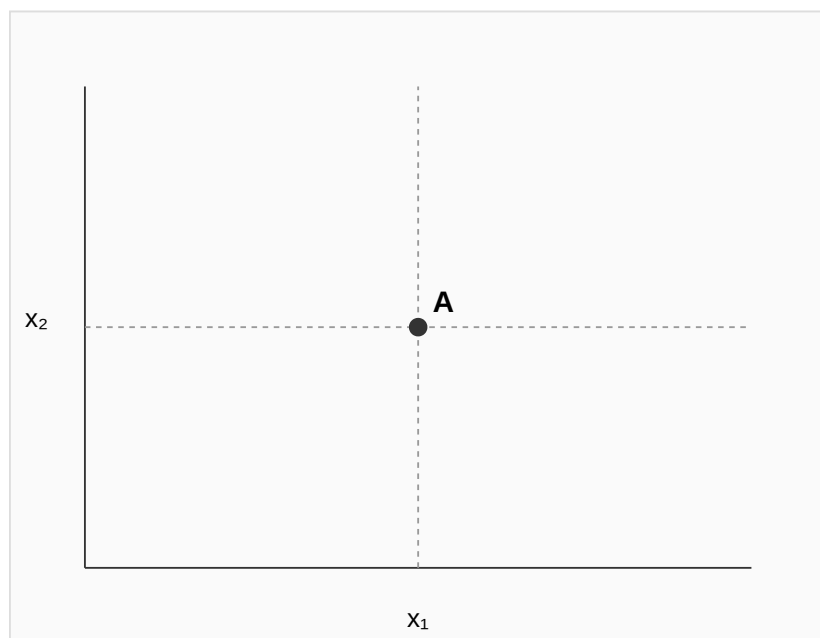
Pela não saciedade, esse cabaz é sempre **melhor** que A . 🤔 E um com **menos** dos dois?

Sempre **pior**. Mas e um cabaz com **mais de um bem e menos do outro**? A não saciedade, de *per se*, **não consegue dizer**.



Experimenta: As Zonas à Volta de A

Clica nos botões para veres o que a não saciedade consegue, e não consegue, classificar.



☒ Zona melhor

☐ Zona pior

Reiniciar



Construindo a Curva

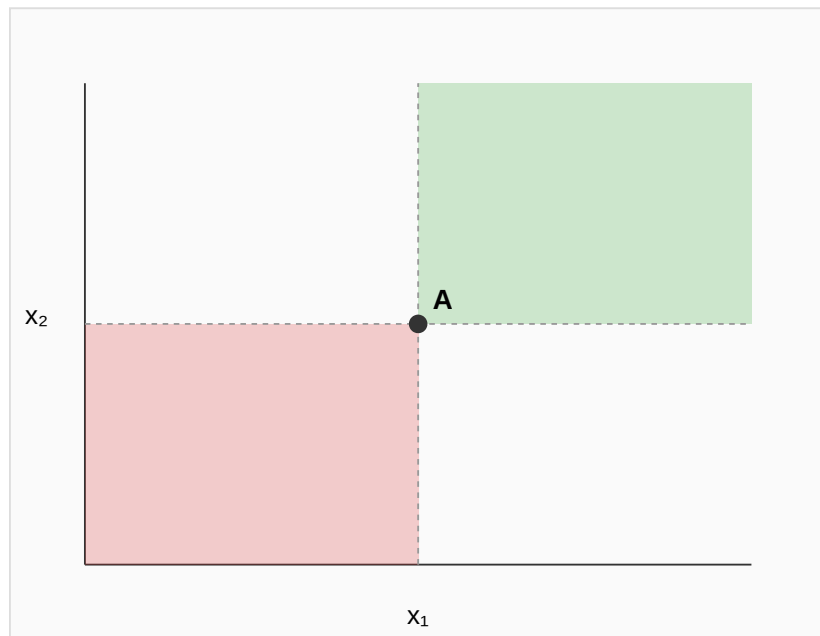
Nas zonas em branco, a não saciedade, de *per se*, não decide. Mas conseguimos **construir** a curva com um truque simples:

1. A partir de A , dá **mais** x_1 ao consumidor (mesmo x_2). Pela não saciedade, ele fica **melhor**.
2. Agora tira-lhe x_2 , aos poucos, até ele voltar a ficar **indiferente** a A .

Esse ponto final, mais x_1 e menos x_2 , mas **igualmente bom** que A : já está **na curva de indiferença**. 💡



Experimenta: Constrói a Curva de Indiferença



① Dá mais x_1 a A

② Tira x_2 até indiferença

③ Repete do outro lado

 Reiniciar

E o Resto do Mapa?

A curva marca os cabazes indiferentes a A . E todos os outros cabazes: melhores ou piores?

Escolhe um ponto B qualquer **na curva**. Por construção, $B \sim A$.

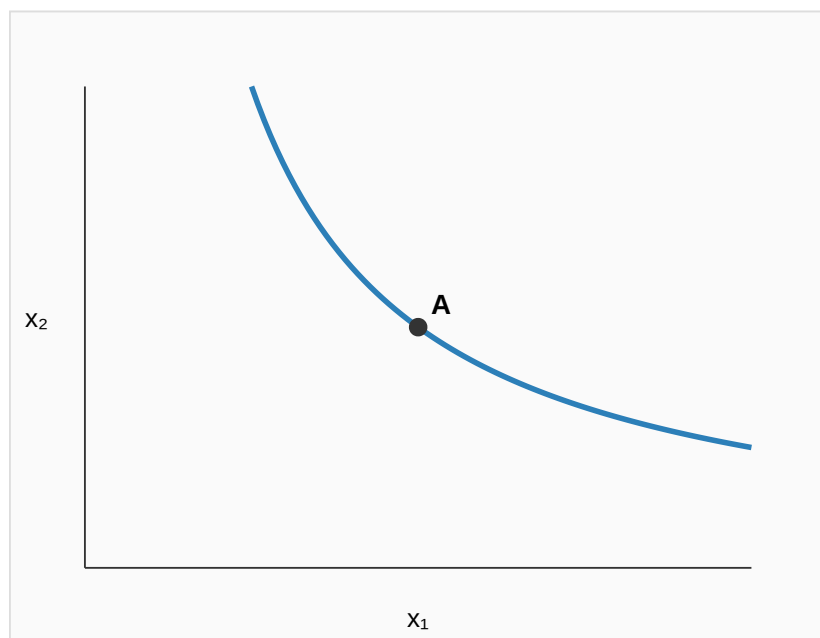
Aplica a não saciedade **em** B : a caixa acima e à direita de B é melhor que B . E melhor que B é melhor que A , porque $B \sim A$: **transitividade**. 

Repete com mais pontos da curva. As caixas vão cobrindo o mapa todo: **acima da curva é sempre melhor, abaixo é sempre pior**.



Experimenta: As Zonas à Volta da Curva

Adiciona pontos na curva e vê as caixas da não saciedade a cobrir o mapa.



+ Adicionar ponto na curva



Generalizar



Reiniciar



Propriedades das Curvas de Indiferença

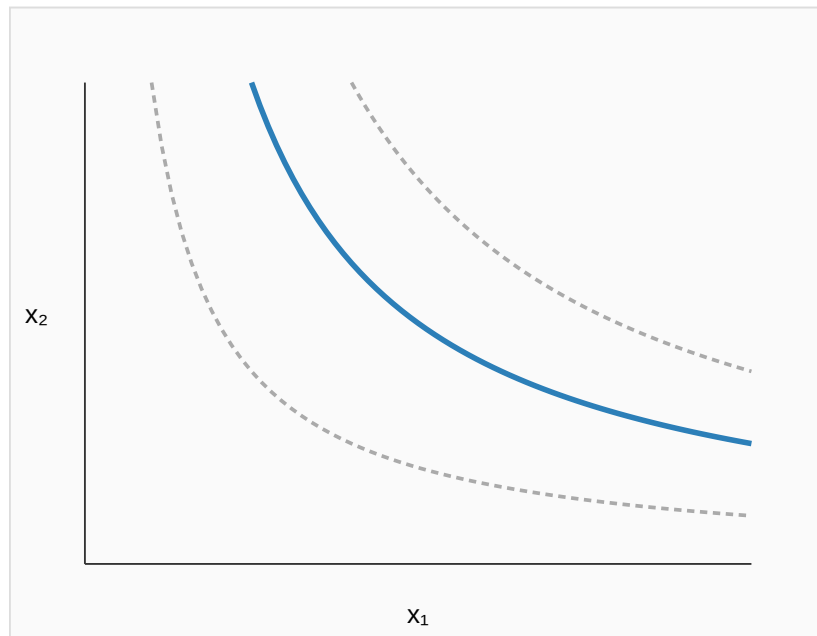
Repara: acabaste de construir uma curva com estas propriedades, todas consequência dos axiomas.

1. **Inclinação negativa** (da não saciedade: mais de um, menos do outro)
2. **Não se cruzam** (da transitividade, prova a seguir)
3. **Convexas em relação à origem** (a variedade é preferida)
4. Curvas mais afastadas da origem representam **maior satisfação** (acabaste de o ver: vivem na zona verde)



Experimenta: Curva de Indiferença Interativa

Mexe no slider: + move a curva para a zona verde, – para a vermelha. Sem números: por enquanto só temos uma **ordem**.



✗ Porque É Que as Curvas de Indiferença Não se Cruzam?

Já viste no gráfico interativo que não se cruzam. Mas porquê, formalmente? Prova por contradição:

Suponha que duas curvas U_1 e U_2 se cruzam num ponto C .

- Seja A um ponto só em U_1 e D um ponto só em U_2 , ambos com a mesma quantidade de x_1 , mas D com mais x_2 .
- Pela não saciedade: $D \succ A$

✗ A Contradição

- Como D e C estão ambos em U_2 : $D \sim C$
- Como C e A estão ambos em U_1 : $C \sim A$
- Pela transitividade: $D \sim C \sim A$, ou seja, $D \sim A$

Contradição!  Tínhamos $D \succ A$, mas também $D \sim A$. Logo, as curvas não se podem cruzar.



Convexidade das Curvas de Indiferença

As curvas de indiferença são **convexas** (curvadas para a origem).

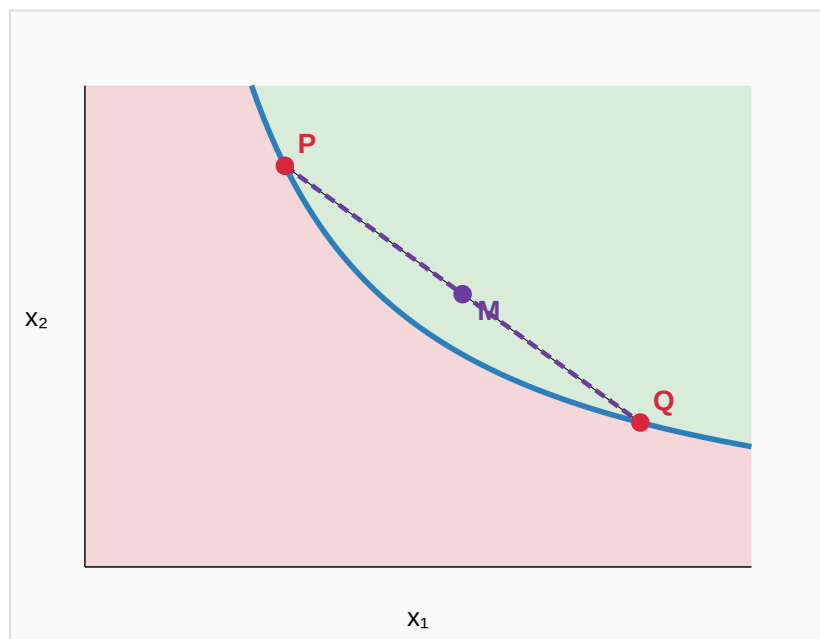
Intuição: a variedade é preferida. Um cabaz equilibrado (com quantidades moderadas de ambos os bens) é preferido a um cabaz extremo (muito de um, quase nada do outro).

Exemplo: entre ter 10 pizzas e 0 saladas, ou 5 pizzas e 5 saladas, a maioria dos consumidores prefere o cabaz equilibrado, mesmo que ambos estejam na mesma curva de indiferença de um modelo sem convexidade.



Experimenta: A Mistura Está na Zona Verde

Mexe nos sliders: P e Q deslizam na curva; M percorre o segmento entre eles.



Posição de P na curva



Posição de Q na curva



P  Q
Mistura M

$P \sim Q$ (mesma curva). E a mistura M? Está na **zona verde**: melhor que P e que Q, qualquer que seja a mistura. É isto a **convexidade**. 🥗



Questões de Revisão (Parte 1)

Pergunta 1

Com preferências racionais e não saciedade, qual afirmação é **verdadeira**?

- a. Curvas mais afastadas da origem representam maior satisfação
- b. As curvas de indiferença têm inclinação positiva
- c. Dois cabazes são indiferentes mesmo que um tenha mais de ambos os bens
- d. As curvas de indiferença podem cruzar-se se as preferências forem transitivas

Pergunta 1 (Solução)

 Solução

Resposta: a) Pela não saciedade, cabazes com mais quantidade são preferidos.

Pergunta 2

O axioma da transitividade implica que:

- a. O consumidor prefere sempre mais
- b. As curvas de indiferença têm inclinação negativa
- c. Todas as combinações de bens são admissíveis
- d. As curvas de indiferença nunca se cruzam

Resposta: d) Se as curvas se cruzassem, existiriam cabazes simultaneamente indiferentes e estritamente preferidos, violando a transitividade.

Pergunta 3 (Exercício)

Considere três cabazes: $A = (4, 8)$, $B = (6, 6)$, $C = (8, 3)$.

- a) Pode a não saciedade, por si só, ordenar A e B ? Justifique.
- b) Suponha que o consumidor revela $A \sim B$ e $B \succ C$. O que podemos concluir sobre a relação entre A e C ?

Solução

- a) Não. B tem mais de x_1 mas menos de x_2 do que A . A não saciedade só ordena cabazes em que um domina o outro em ambas as dimensões.
- b) Pela transitividade: $A \sim B$ e $B \succ C$ implicam $A \succ C$.

Parte 2: Taxa Marginal de Substituição (TMS)





Definição da TMS

Taxa Marginal de Substituição

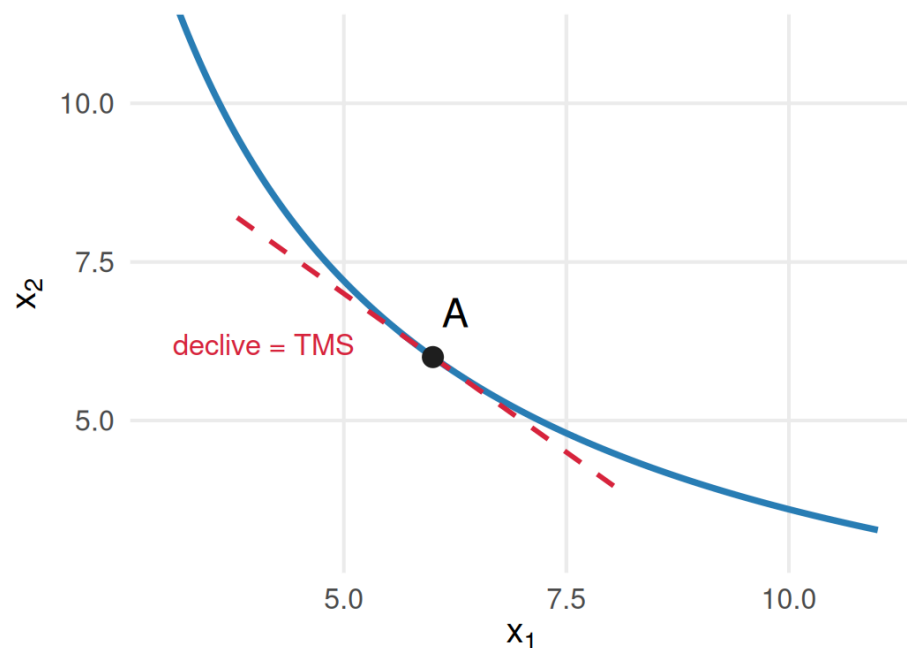
A TMS é o **declive da curva de indiferença** num ponto: a variação de x_2 por cada unidade adicional de x_1 que mantém o consumidor **na mesma curva**. Como a curva tem inclinação negativa (ganha-se x_1 , cede-se x_2), a TMS é **negativa**.

$$\text{TMS} = \left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{\text{na curva}} < 0$$

Trabalhamos muitas vezes com o seu **valor absoluto**, $|\text{TMS}|$: a quantidade de x_2 cedida por uma unidade de x_1 . É esta forma que vai entrar na condição de tangência. 



A TMS no Gráfico



A reta tangente (a vermelho) toca a curva só no ponto A . O seu declive é a TMS nesse ponto (negativo); em valor absoluto, é $|TMS|$.



TMS Decrescente e Convexidade

A convexidade da curva implica que $|TMS|$ é **decrescente** ao longo dela.

À medida que avanças para a direita na curva (mais x_1 , menos x_2), a curva vai ficando **mais horizontal**: o declive, em valor absoluto, diminui.

Intuição: se já tens muita pizza e pouca salada, estás disposto a ceder cada vez menos salada por mais uma fatia de pizza. 🍕



Questões de Revisão (Parte 2)

Pergunta 4

A TMS num ponto da curva de indiferença representa:

- a. O preço relativo dos dois bens
- b. A quantidade de x_2 que o consumidor cede por uma unidade adicional de x_1 , na mesma curva de indiferença
- c. A inclinação da reta orçamental
- d. A satisfação total do consumidor

Resposta: b)

Pergunta 5

Se $|TMS|$ é decrescente ao longo da curva de indiferença, isso significa que:

- a. As curvas de indiferença são retas
- b. O consumidor valoriza cada vez mais o bem 1
- c. À medida que o consumidor obtém mais de x_1 , está disposto a ceder cada vez menos de x_2 por unidades adicionais de x_1
- d. O consumidor é irracional

Resposta: c) É exatamente o significado de $|TMS|$ decrescente: a curva fica mais horizontal à medida que x_1 aumenta.

Pergunta 6 (Exercício)

Suponha que num ponto A de uma curva de indiferença, $|TMS| = 3$. Noutro ponto B da mesma curva, mais à direita (mais x_1 , menos x_2), $|TMS| = 1$.

- a) No ponto A , quantas unidades de x_2 o consumidor está disposto a ceder por uma unidade adicional de x_1 ?
- b) Explique porque é que $|TMS|$ diminuiu de A para B , usando a convexidade da curva.

✓ Pergunta 6 (Solução)

Solução

- a) No ponto A , o consumidor está disposto a ceder 3 unidades de x_2 por 1 unidade adicional de x_1 .
- b) B está mais à direita na curva do que A . Pela convexidade, a curva vai ficando mais horizontal à medida que avançamos para a direita: o declive em valor absoluto, ou seja $|\text{TMS}|$, diminui de 3 (em A) para 1 (em B).

Parte 3: Rumor à Função de Utilidade





Como Comparamos Cabazes sem Desenhar?

Na Parte 2, comparámos cabazes através de **gráficos**: a curva de indiferença, a sua inclinação, a TMS como declive.

Mas desenhar não é prático para calcular. Precisamos de uma forma de comparar cabazes **sem desenhar**.

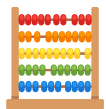
Pergunta: dados dois cabazes, $A = (3, 8)$ e $B = (6, 4)$, como sabes qual dá mais satisfação, sem desenhar curvas de indiferença?

Uma Função que Atribui um Número a Cada Cabaz

Função de Utilidade

$U(x_1, x_2)$ é uma função que atribui um número a cada cabaz (x_1, x_2) , de forma consistente com as preferências: cabazes preferidos recebem números maiores.

Com isto, comparar cabazes deixa de exigir um gráfico: basta calcular $U(A)$ e $U(B)$ e comparar os números.



Traduzindo Preferências em Números

Por definição, U tem de concordar com a relação de preferência $\succsim$ que já conhecemos:

$$A \succ B \iff U(A) > U(B)$$

$$A \sim B \iff U(A) = U(B)$$

$$A \succsim B \iff U(A) \geq U(B)$$

É só isto: U **traduz** a ordem de preferência para uma ordem de números. Nada mais.

★ Avaliações em Escalas Diferentes

Um crítico avalia os **mesmos restaurantes** em dois sites: num dá estrelas (1 a 5), no outro dá notas de 1 a 10.

A um certo restaurante deu **4/5** no primeiro site e **9,5/10** no segundo. As duas avaliações contradizem-se?

Não necessariamente: a segunda escala pode ser mais **generosa** com os números. As duas avaliações dizem o mesmo desde que preservem a **ordem**: sempre que um restaurante é melhor do que outro, tem mais estrelas no primeiro site e mais pontos no segundo. 💡



Cuidado: Utilidade É Ordinal, Não Cardinal

$U(A) = 100$ e $U(B) = 50$ **não** significa que A dá “o dobro” da satisfação de B , tal como o 9,5/10 e o 4/5 do crítico não medem “quanto” ele gosta: escalas diferentes, mesma opinião.

Significa apenas que $A \succ B$: o **número em si** não tem significado, só a **ordem** que ele induz entre os cabazes.

Por isso qualquer transformação que preserve a ordem (ex.: multiplicar por 2, elevar ao quadrado) representa **as mesmas preferências**: mudar de escala não muda qual restaurante é melhor.

A Curva que Já Conhecemos

Lembras-te do slider $-/+$ que movia a curva de indiferença? Não tinha números: só uma direção, mais ou menos preferido.

Por trás, esse slider estava a escolher a constante da curva $x_1 \cdot x_2 = c$. O número esteve lá sempre: só **agora** lhe podemos chamar **utilidade**.

$U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ é um exemplo concreto de função de utilidade: gera curvas convexas, sem cruzamentos, mais afastadas da origem quanto maior U .

Repara: não é arbitrária. É exatamente o que os três axiomas exigiam, uma forma de **representar** as preferências que já tínhamos. 



Exercício Numérico

Recorda o exemplo da secção de convexidade: 10 pizzas e 0 saladas, ou 5 pizzas e 5 saladas.

Usando $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$:

$$U(10, 0) = 10 \times 0 = 0$$

$$U(5, 5) = 5 \times 5 = 25$$

Como $25 > 0$, o cabaz equilibrado $(5, 5)$ está numa curva de indiferença mais afastada da origem, e é **preferido**. Confirma numericamente a intuição que já tínhamos sobre convexidade e variedade.

Utilidade Marginal

Se U atribui um número a cada cabaz, há uma pergunta natural: quanto sobe esse número se eu tiver **mais uma unidade** de um dos bens?

A essa satisfação extra, mantendo o outro bem fixo, chamamos **utilidade marginal** (UMg).

É a mesma ideia de “na margem” da aula 2: não perguntamos o valor do total, perguntamos o valor da **próxima** unidade. 

A UMg é uma Derivada Parcial

“Variar um bem e manter o outro fixo” é, em linguagem de cálculo, exatamente uma **derivada parcial**:

$$\text{UMg}_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad \text{UMg}_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}$$

Com $U = x_1 \cdot x_2$: $\text{UMg}_1 = x_2$. Ter mais salada torna a pizza seguinte mais valiosa. 🍕



Revisitar a TMS

Na Parte 2, vimos a TMS como o **declive da curva de indiferença**. Agora que temos $U(x_1, x_2)$, conseguimos calculá-la **sem desenhar**.

Ao longo de uma curva de indiferença, U não muda: $dU = 0$.

$$dU = UMg_1 \cdot dx_1 + UMg_2 \cdot dx_2 = 0$$

Isolando:

$$TMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UMg_1}{UMg_2} \Rightarrow \boxed{|TMS| = \frac{UMg_1}{UMg_2}}$$

Como $UMg_1, UMg_2 > 0$ (mais de qualquer bem aumenta a utilidade), a TMS é negativa; é o seu valor absoluto $|TMS| = UMg_1/UMg_2$ que usamos daqui em diante. 💡



Calculando a TMS Analiticamente

Com $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$:

$$\text{UMg}_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = x_2, \quad \text{UMg}_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = x_1$$

$$|\text{TMS}| = \frac{\text{UMg}_1}{\text{UMg}_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

No cabaz (6, 6) que usámos para construir a curva no início da aula: $|\text{TMS}| = 6/6 = 1$. Já não precisas de desenhar tangentes: é só substituir. 💡



Questões de Revisão (Parte 3)

Pergunta 7

Se $U(A) = 40$ e $U(B) = 20$, podemos concluir que:

- a. A dá exatamente o dobro de satisfação de B
- b. $A \succ B$, mas não sabemos “quanto mais”
- c. A e B estão na mesma curva de indiferença
- d. A função de utilidade não é válida

Resposta: b) A utilidade é ordinal: o número só importa para ordenar, não para medir “quanto”.

Pergunta 8

Se substituirmos U por $V = U^2$ (transformação que preserva a ordem, para valores positivos), o que acontece à ordenação dos cabazes?

- a. Muda completamente
- b. Só se mantém para U negativo
- c. Mantém-se exatamente igual: V representa as mesmas preferências que U
- d. Deixa de existir uma função de utilidade válida



Pergunta 8 (Solução)



Solução

Resposta: c) Qualquer transformação que preserve a ordem representa as mesmas preferências: é o ponto da utilidade ser ordinal.

Pergunta 9 (Exercício)

Considere $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Um consumidor compara dois cabazes: $A = (6, 6)$ e $B = (4, 10)$.

a) Calcule $U(A)$ e $U(B)$.

b) Qual cabaz é preferido?

c) Encontre um cabaz $C = (x_1, 3)$ que deixe o consumidor indiferente a B .



Pergunta 9 (Solução)



Solução

- a) $U(A) = 6 \times 6 = 36$. $U(B) = 4 \times 10 = 40$.
- b) Como $40 > 36$, o cabaz B é preferido: $B \succ A$.
- c) C tem de estar na mesma curva de indiferença que B , ou seja, $U(C) = 40$:
 $x_1 \times 3 = 40 \Rightarrow x_1 = 40/3 \approx 13,3$.

? E Agora?

Sabemos que $U(x_1, x_2)$ existe e representa as preferências. Mas qual é a sua **forma exata**?

Isso ainda não respondemos, e não vamos resolver hoje o problema do consumidor.

Na próxima aula: escolhemos uma forma específica (Cobb-Douglas) e juntamos $U(x_1, x_2)$ com a restrição orçamental para encontrar a escolha ótima. 