

Microeconomia

Utilidade e Problema do Consumidor



Tópicos de Hoje

- A função Cobb-Douglas (forma geral e forma logarítmica)
- Utilidade marginal, outra vez, agora com uma forma concreta
- A utilidade em três dimensões
- O problema do consumidor: a escolha ótima, resolvida graficamente (tangência e a 2.^a lei de Gossen)
- As procuras Marshallianas
- Da procura individual à procura em geral

Parte 1: A Função Cobb-Douglas e a Utilidade Marginal





Onde Ficámos

Na aula passada, concluímos que existe uma função $U(x_1, x_2)$ que representa as preferências: cabazes preferidos recebem números maiores.

Mas nunca dissemos **qual é** essa função, só que ela existe e é consistente com os três axiomas.

Para calcular escolhas concretas, precisamos de escolher uma forma específica. 



Precisamos de Uma Forma Concreta

“Existe uma função U ” é suficiente para provar teoremas, mas não para responder a uma pergunta como: quantas pizzas e quantas saladas deve comprar este consumidor, com este orçamento?

Para isso precisamos de uma fórmula que possamos **derivar** e **calcular**.

✖ A Função Cobb-Douglas

Função Cobb-Douglas

$$U(x_1, x_2) = x_1^a \cdot x_2^b, \quad a, b > 0$$

É a forma funcional mais usada em microeconomia: satisfaz não saciedade, transitividade e completude, e gera curvas de indiferença convexas, exatamente como as que construímos à mão na aula passada.



Simplificando: Normalizar os Expoentes

A utilidade é ordinal, por isso podemos elevar U a $1/(a + b)$ sem mudar a ordenação:

$$U(x_1, x_2) = x_1^\alpha \cdot x_2^{1-\alpha}, \quad \alpha = \frac{a}{a + b} \in (0, 1)$$

Esta é a **forma normalizada**: os expoentes somam sempre 1. É a forma que vamos usar em todos os problemas deste curso.



O Que Significa α ?

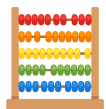
α mede o **peso relativo** do bem 1 nas preferências do consumidor.

- α perto de 1: o consumidor dá muito mais valor a x_1
- α perto de 0: o consumidor dá muito mais valor a x_2
- $\alpha = 0,5$: o consumidor valoriza ambos os bens de igual forma

Ligando ao Que Já Conhecemos

A função $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ que usámos na aula passada para desenhar curvas de indiferença...

...é exatamente o caso Cobb-Douglas com $\alpha = 0,5$: $x_1^{0,5} \cdot x_2^{0,5}$ é uma transformação crescente de $x_1 \cdot x_2$. 



Utilidade Marginal na Cobb-Douglas

A UMg da aula passada ($\partial U / \partial x_i$), aplicada agora a

$$U = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}:$$

$$\text{UMg}_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}$$

$$\text{UMg}_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = (1 - \alpha) x_1^\alpha x_2^{-\alpha}$$



Utilidade Marginal Decrescente

Fixa x_2 e aumenta x_1 . O que acontece a UMg_1 ?

$$\frac{\partial UMg_1}{\partial x_1} = \alpha(\alpha - 1) x_1^{\alpha-2} x_2^{1-\alpha} < 0 \quad \text{porque } \alpha < 1$$

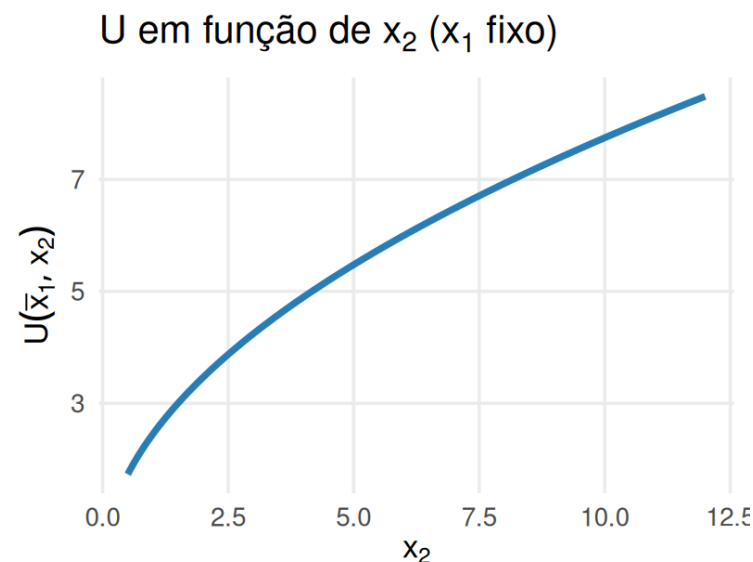
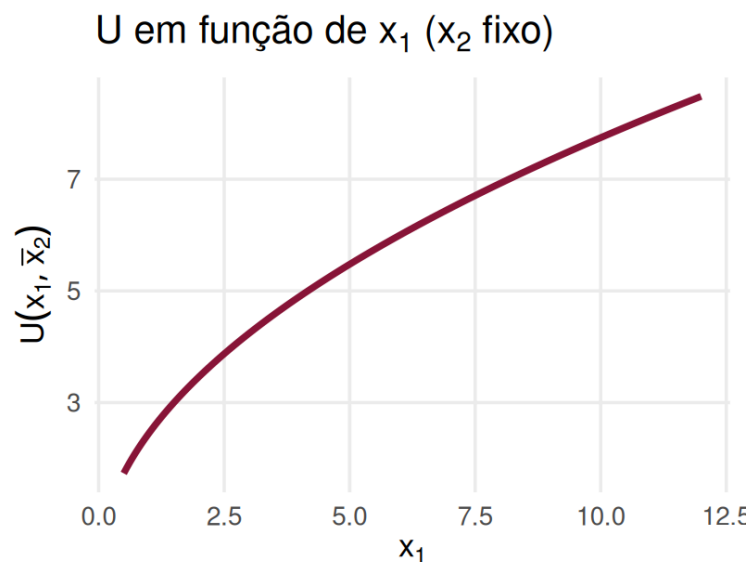
UMg_1 **diminui** à medida que x_1 aumenta: cada pizza adicional dá menos satisfação extra do que a anterior, mantendo a salada fixa.

Antes de ver isto num gráfico da própria UMg_1 , vale a pena olhar para a utilidade em si.



Utilidade Parcial: Fixar um Bem

Se fixarmos x_2 e deixarmos x_1 variar, obtemos um “corte” da montanha na direção de x_1 (e vice-versa).

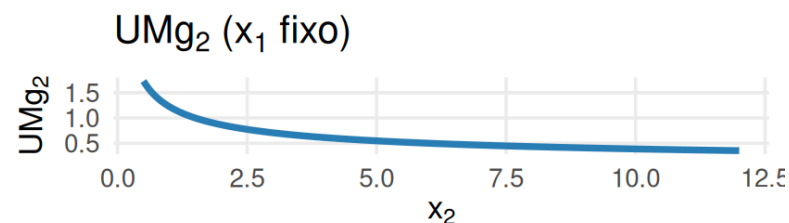
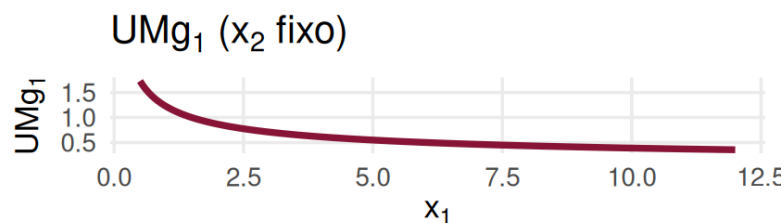
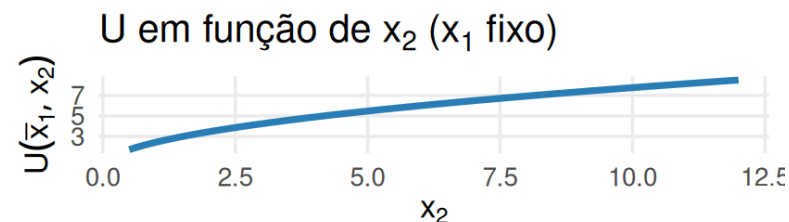
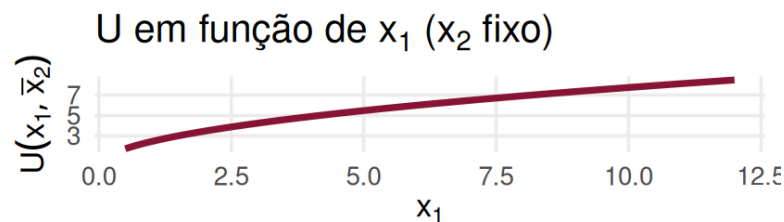


Repara: crescem cada vez mais devagar, ficam mais “deitadas”. Já é a utilidade marginal decrescente, a olho. 🧐



UMg: O Declive da Utilidade Parcial

A utilidade marginal é o declive destas curvas, em cada ponto:

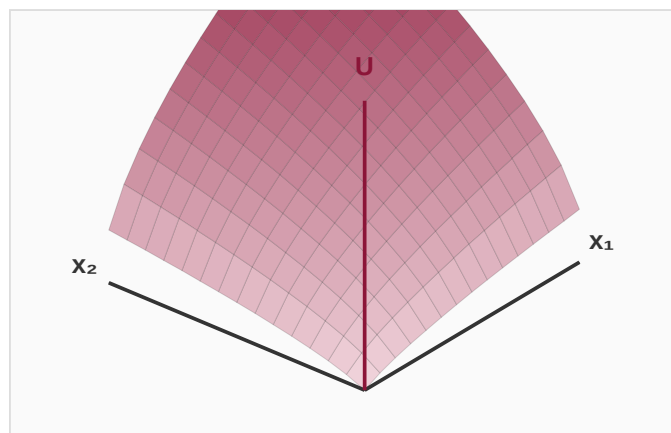


Em cada coluna, o gráfico de baixo é o declive do de cima. A mesma informação, vista de duas formas. 🎯



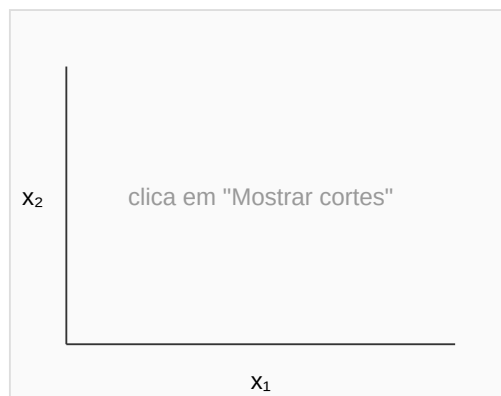
A Utilidade em Três Dimensões

Até agora desenhámos U em duas dimensões. Mas $U(x_1, x_2)$ é uma **superfície**: para cada cabaz, uma altura. Arrasta para rodar.



Repór vista

Mostrar cortes



Curvas de nível (vista de cima)

Mais longe da origem, mais alto: não saciedade, em relevo.
“Mostrar cortes” revela essas alturas como curvas de indiferença.



TMS da Cobb-Douglas

$$|\text{TMS}| = \frac{\text{UMg}_1}{\text{UMg}_2} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x_1^\alpha x_2^{-\alpha}}$$

Simplificando:

$$|\text{TMS}| = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{x_2}{x_1}$$

Com $\alpha = 0,5$, isto reduz-se a $|\text{TMS}| = x_2/x_1$, exatamente o que calculámos na aula passada para $U = x_1 x_2$. 



Exercício Resolvido: TMS

Considere $U(x_1, x_2) = x_1^{0,4} x_2^{0,6}$ e o cabaz $(x_1, x_2) = (5, 10)$.

$$|\text{TMS}| = \frac{0,4}{0,6} \cdot \frac{10}{5} = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \approx 1,33$$

O consumidor está disposto a ceder cerca de 1,33 unidades de x_2 por uma unidade adicional de x_1 , neste cabaz.



Questões de Revisão (Parte 1)

Pergunta 1

Se $U = x_1^{0,3} x_2^{0,7}$ e $V = U^2$, o que podemos afirmar?

- a. U e V representam as mesmas preferências
- b. V dá sempre o dobro da satisfação de U
- c. U e V representam preferências diferentes
- d. V só é válida se $x_1 > x_2$



Pergunta 1 (Solução)



Solução

Resposta: a) $V = U^2$ é uma transformação crescente de U (para $U > 0$), logo preserva a ordenação dos cabazes: representa as mesmas preferências.

Pergunta 2

Na Cobb-Douglas $U = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$, o que acontece a UMg_1 quando x_1 aumenta, mantendo x_2 fixo?

- a. Aumenta sempre
- b. Mantém-se constante
- c. Diminui, porque $\alpha < 1$
- d. Diminui só se $\alpha > 0,5$

Resposta: c) $\partial UMg_1 / \partial x_1 = \alpha(\alpha - 1)x_1^{\alpha-2}x_2^{1-\alpha} < 0$ para qualquer $\alpha \in (0, 1)$.

Pergunta 3 (Exercício)

Considere $U(x_1, x_2) = x_1^{0,25} x_2^{0,75}$.

- a) Calcule UMg_1 e UMg_2 no cabaz $(x_1, x_2) = (4, 8)$.
- b) Calcule $|TMS|$ nesse cabaz e interprete.

✓ Pergunta 3 (Solução)

💡 Solução

a) $UMg_1 = 0,25 \cdot 4^{-0,75} \cdot 8^{0,75} = 0,25 \times 2^{0,75} \approx 0,25 \times 1,68 \approx 0,42$

$$UMg_2 = 0,75 \cdot 4^{0,25} \cdot 8^{-0,25} = 0,75 \times 0,5^{0,25} \approx 0,75 \times 0,84 \approx 0,63$$

b) $|TMS| = \frac{0,25}{0,75} \cdot \frac{8}{4} = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3} \approx 0,67$: o consumidor cede cerca de 0,67

unidades de x_2 por uma unidade extra de x_1 , neste cabaz. Repara que isto coincide com $UMg_1/UMg_2 \approx 0,42/0,63 \approx 0,67$, como tem de ser.

Parte 2: O Problema do Consumidor

Juntando as Duas Peças

Já temos as duas peças que faltavam:

- **Preferências:** $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$
- **Restrição:** $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq W$ (aula 2)

Falta uma pergunta: qual é o cabaz **admissível** que dá **mais satisfação**?



Formalizando o Problema

! O Problema do Consumidor

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \quad \text{sujeito a} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = W$$

Porque igualdade e não $\leq$? Pela **não saciedade** (aula passada): mais é sempre melhor, por isso o consumidor ótimo nunca deixa dinheiro por gastar.



Como Encontrar o Melhor Cabaz?

O consumidor pode comprar qualquer cabaz **dentro** do orçamento: são infinitos. Por onde começar?

Primeira pista, da não saciedade: mais é sempre melhor, por isso nunca vale a pena deixar dinheiro por gastar. O cabaz ótimo está **em cima** da reta orçamental, não no interior. 🎯

Isto reduz a busca de uma área para uma linha. Mas ainda são infinitos pontos nessa linha. Qual deles?



Começar num Ponto Qualquer

Escolhe um cabaz A em cima da reta orçamental. Passa por ele a curva de indiferença: todos os cabazes que dão **a mesma** satisfação que A .

Pergunta simples: consegues fazer melhor do que A sem sair do orçamento? 🤔



Os Cabazes “Melhores”

“Melhor que A ” quer dizer: **acima** da curva de indiferença que passa por A (mais afastado da origem, mais satisfação).

“Admissível” quer dizer: **dentro ou em cima** da reta orçamental.

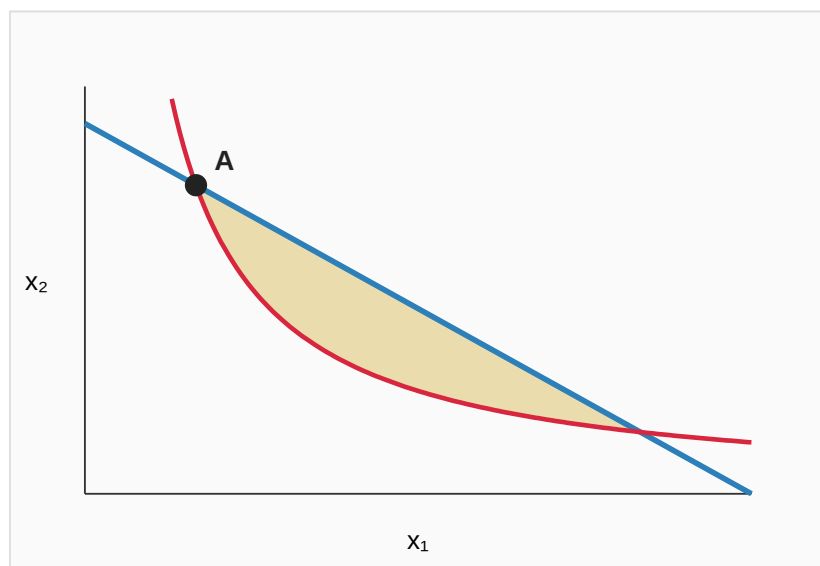
Se existir um cabaz que seja as duas coisas ao mesmo tempo, então A **não** é o melhor: há um cabaz melhor e ainda admissível.

O conjunto “melhores $\cap$ admissíveis” não está vazio. 💡



Gráfico Interativo: o Ótimo

Arrasta o ponto A ao longo da reta. A zona sombreada são os cabazes **melhores e admissíveis**. Fá-la desaparecer. 



$$\alpha = 0,5 \quad W = 120 \quad p_1 = 4 \quad p_2 = 6$$

$$x_1 = 5,0 \quad x_2 = 16,7$$

$$|TMS| = x_2/x_1 = 3,33$$

$$p_1/p_2 = 0,67$$

 Ainda há cabazes melhores e admissíveis.

O ótimo é onde a zona sombreada **desaparece**: já não há cabaz melhor e admissível. 

O Ótimo: A Reta Toca a Curva

Quando a zona sombreada desaparece, a curva de indiferença deixa de **atravessar** a reta orçamental e passa a apenas **tocá-la** num ponto: são **tangentes**.

Nesse ponto ótimo acontecem duas coisas ao mesmo tempo:

1. O cabaz está **em cima** da reta: $p_1x_1 + p_2x_2 = W$ (gasta tudo).
2. A curva de indiferença e a reta têm o **mesmo declive** nesse ponto.



A Condição de Tangência: $|TMS| = p_1/p_2$

O declive da curva de indiferença é a **TMS**; em valor absoluto, $|TMS|$ (aula passada). O declive da reta orçamental é $-p_1/p_2$, com valor absoluto p_1/p_2 (aula 2).

Mesmo declive, no ótimo (em valor absoluto):

$$|TMS| = \frac{p_1}{p_2}$$

A esta condição chamamos a **segunda lei de Gossen**. Não a assumimos: saiu do gráfico, de esgotar os cabazes melhores. 🎯

€ Interpretação 1: Benefício = Custo, na Margem

O que é $|TMS|$? Quanto de bem 2 estás disposto a ceder por **mais uma** unidade de bem 1, mantendo a satisfação.

Multiplica por p_2 : então $p_2 \cdot |TMS|$ é o **valor em euros** que abdicas para ter mais uma unidade de bem 1. É a tua **disponibilidade a pagar** (DAP) por essa unidade, o **benefício marginal** dela em euros.

A condição $|TMS| = p_1/p_2$ é o mesmo que $p_2 \cdot |TMS| = p_1$:

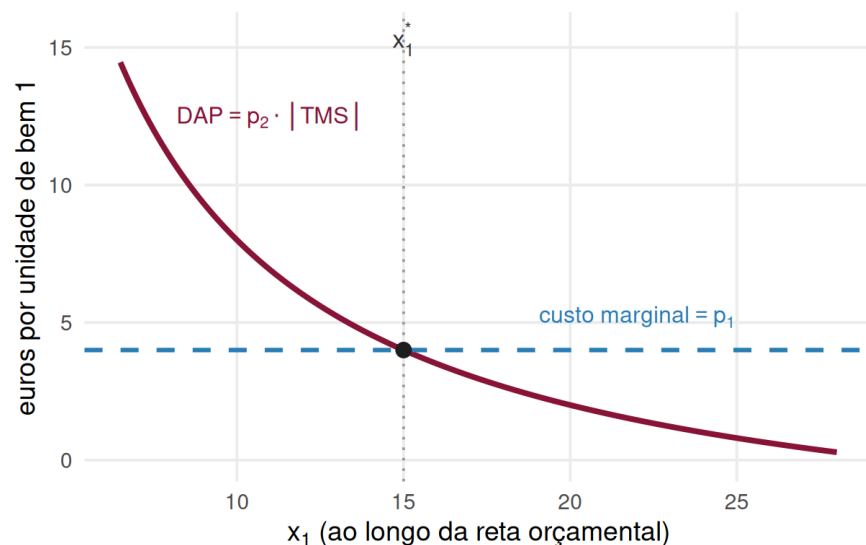
$$\underbrace{p_2 \cdot |TMS|}_{\text{DAP} = \text{benefício marginal}} = \underbrace{p_1}_{\text{custo marginal}}$$

No ótimo, o que estás disposto a pagar por mais uma unidade é **exatamente** o que ela custa.





Benefício Marginal = Custo Marginal, em Gráfico



À esquerda de x_1^* : a DAP é maior que o preço, cada unidade extra vale mais do que custa, **compra mais**. À direita: vale menos do que custa, **compra menos**. Igualam-se em x_1^* . 🎯



Interpretação 2: Utilidade por Euro

Como $|TMS| = UM_{g_1}/UM_{g_2}$, a condição $|TMS| = p_1/p_2$ é equivalente a:

$$\frac{UM_{g_1}}{UM_{g_2}} = \frac{p_1}{p_2} \iff \boxed{\frac{UM_{g_1}}{p_1} = \frac{UM_{g_2}}{p_2}}$$

Cada lado é a satisfação extra por **euro gasto** em cada bem. No ótimo, o último euro gasto em qualquer um dos dois bens dá exatamente a mesma satisfação extra: não compensa mudar dinheiro de um bem para o outro.



Utilidade por Euro: E Se Não Forem Iguais?

Se $UMg_1/p_1 > UMg_2/p_2$, um euro rende mais no bem 1.

Compensa gastar mais em x_1 e menos em x_2 , até a igualdade se restabelecer.

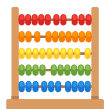
É o mesmo raciocínio de **benefício marginal = custo marginal**, aplicado por euro gasto: continua a mudar dinheiro entre bens enquanto um lado render mais do que o outro. 💡

Resolver: Duas Equações, Duas Incógnitas

O ótimo fica caracterizado por **duas** condições, um sistema de duas equações a duas incógnitas (x_1, x_2) :

⚠ Sistema do ótimo

$$\begin{cases} |\text{TMS}| = \frac{p_1}{p_2} & (\text{tangência, 2.ª lei de Gossen}) \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = W & (\text{restrição orçamental}) \end{cases}$$



Aplicar à Cobb-Douglas

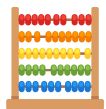
O valor absoluto da TMS da Cobb-Douglas, da Parte 1, é

$|TMS| = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \frac{x_2}{x_1}$. A primeira equação fica:

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Arrumando, isto relaciona as duas despesas:

$$\alpha p_2 x_2 = (1 - \alpha) p_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad p_2 x_2 = \frac{1 - \alpha}{\alpha} p_1 x_1$$



Aplicar à Cobb-Douglas (cont.)

Substituindo na restrição $p_1 x_1 + p_2 x_2 = W$:

$$p_1 x_1 + \underbrace{\frac{1 - \alpha}{\alpha} p_1 x_1}_{= p_2 x_2} = W \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} p_1 x_1 = W$$

$$x_1^* = \frac{\alpha W}{p_1}$$

e, da restrição,

$$x_2^* = \frac{(1 - \alpha) W}{p_2}$$

Duas equações, um par de contas, e temos o cabaz ótimo. 



As Procuras Marshallianas



Procura Marshalliana

$$x_1^*(p_1, p_2, W) = \frac{\alpha W}{p_1}$$

$$x_2^*(p_1, p_2, W) = \frac{(1 - \alpha) W}{p_2}$$

São as quantidades que o consumidor **escolhe**, em função dos preços e do rendimento, resolvendo o problema. É a isto que chamamos **procura Marshalliana**.



Quotas de Despesa Constantes

! Quotas de despesa constantes

Na Cobb-Douglas, o consumidor gasta sempre a fração α do rendimento no bem 1 e $(1 - \alpha)$ no bem 2, **independentemente dos preços**:

$$p_1 x_1^* = \alpha W \quad p_2 x_2^* = (1 - \alpha) W$$

1 2
3 4

Exemplo Numérico Resolvido

Dados: $\alpha = 0,6$, $W = 1000$, $p_1 = 20$, $p_2 = 10$.

$$x_1^* = \frac{0,6 \times 1000}{20} = 30 \qquad x_2^* = \frac{0,4 \times 1000}{10} = 40$$

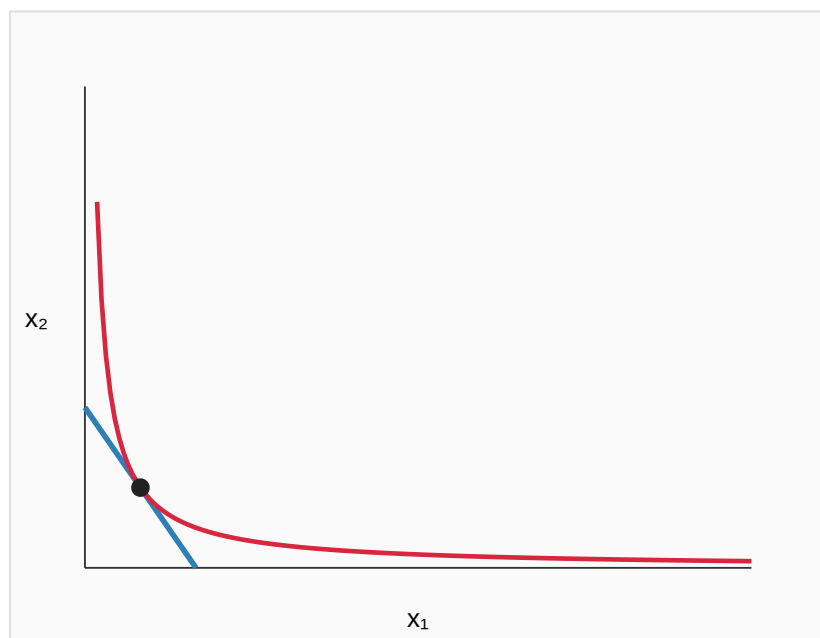
Verificação:

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = 20 \times 30 + 10 \times 40 = 600 + 400 = 1000 = W \quad \checkmark$$



Experimenta: Escolha Ótima Interativa

Mexe nos sliders. A curva de indiferença desenhada passa sempre pelo ponto ótimo calculado.



α : 0.50



p_1 : 10.0



p_2 : 5.0



W : 100



x_1^* : 5.00

x_2^* : 10.00



Questões de Revisão (Parte 2)

Pergunta 4

Com $U = x_1^{0,5} x_2^{0,5}$, $W = 200$, $p_1 = 10$, $p_2 = 5$, qual é a quantidade ótima de x_1 ?

- a. 5
- b. 15
- c. 20
- d. 10

Resposta: d) $x_1^* = 0,5 \times 200/10 = 10$

Pergunta 5

Se o preço do bem 1 duplicar (tudo o resto constante), na Cobb-Douglas:

- a. A despesa no bem 1 duplica
- b. A despesa no bem 1 mantém-se, mas a quantidade comprada cai para metade
- c. A despesa no bem 1 e a quantidade comprada diminuem
- d. O consumidor deixa de comprar o bem 1



Pergunta 5 (Solução)



Solução

Resposta: b) $p_1 x_1^* = \alpha W$ é constante, independente de p_1 . Se p_1 duplica, x_1^* tem de cair para metade para manter essa despesa.

Pergunta 6 (Exercício)

Um consumidor tem $U = x_1^{0,3} x_2^{0,7}$, $W = 500$, $p_1 = 5$, $p_2 = 10$.

- a) Determine o cabaz ótimo (x_1^*, x_2^*) .
- b) Verifique que o orçamento é inteiramente gasto.

✓ Pergunta 6 (Solução)

💡 Solução

$$\text{a) } x_1^* = \frac{0,3 \times 500}{5} = 30 \quad x_2^* = \frac{0,7 \times 500}{10} = 35$$

$$\text{b) } 5 \times 30 + 10 \times 35 = 150 + 350 = 500 = W \quad \checkmark$$

Parte 3: Das Procuras Marshallianas à Procura em Geral

O Que É Mesmo Uma Procura Marshalliana?

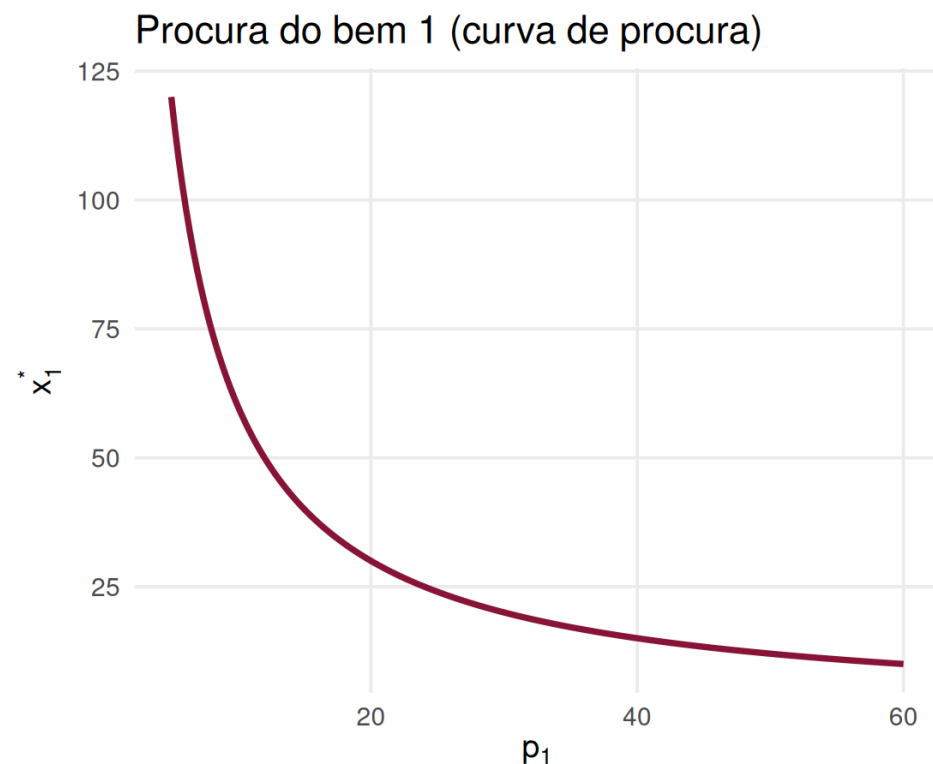
$x_1^*(p_1, p_2, W)$ não é só um número: é uma **função**, o resultado de resolver o problema de maximização para quaisquer preços e rendimento.

É a esta função, escolha ótima em função de preços e rendimento, que chamamos **procura Marshalliana**.



A Procura do Bem 1 em Função do Seu Preço

Fixando α , W e p_2 , e deixando p_1 variar:



$$x_1^*(p_1) = \frac{\alpha W}{p_1}$$

Isto é literalmente a **curva de procura** deste consumidor para o bem 1.



A Lei da Procura

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = -\frac{\alpha W}{p_1^2} < 0, \quad \text{sempre}$$

Lei da Procura

Quando o preço de um bem aumenta, a quantidade procurada desse bem diminui, mantendo tudo o resto constante.



O Efeito do Rendimento

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial W} = \frac{\alpha}{p_1} > 0$$

Quando o rendimento aumenta, a quantidade procurada também aumenta: na Cobb-Douglas, os dois bens são sempre **bens normais**.

Nem todos os bens se comportam assim: bens inferiores, cuja procura cai quando o rendimento aumenta, existem, mas não podem surgir de uma utilidade Cobb-Douglas. Voltaremos a isto com outras formas de U .

O Preço do Outro Bem Não Entra

Repara: $x_1^* = \alpha W / p_1$ **não depende de** p_2 .

Esta é uma propriedade especial da Cobb-Douglas, não uma verdade geral: para outras formas de U , a procura de um bem pode depender do preço do outro.



Quando Funciona a Tangência?

O método da tangência não é exclusivo da Cobb-Douglas: funciona para qualquer U **diferenciável** com curvas de indiferença **estritamente convexas**, sem vértices nem troços retos.

Não funciona, por exemplo, para:

- **Complementos perfeitos** (Leontief), $U = \min\{x_1, x_2\}$: curvas em L, sem declive definido no vértice, que é onde está o ótimo.
- **Substitutos perfeitos**, $U = x_1 + x_2$: curvas retas com $|\text{TMS}|$ constante, que em geral nunca iguala p_1/p_2 ; o ótimo fica num canto, só com um dos bens.



Da Procura Individual à Procura em Geral

Seja qual for U , a escolha ótima é sempre uma função $x_1^*(p_1, p_2, W)$ com duas propriedades gerais.

1. Só os preços relativos importam: duplicar p_1 , p_2 e W ao mesmo tempo não muda a escolha ótima. Porquê? A restrição é a mesma reta:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = W \quad \Longleftrightarrow \quad 2p_1x_1 + 2p_2x_2 = 2W$$

Mesma restrição, preferências e escolha.



Da Procura Individual à Procura em Geral (cont.)

2. Esgotamento do orçamento: $p_1x_1^* + p_2x_2^* = W$, sempre, consequência direta da não saciedade.

Estas duas propriedades não são exclusivas da Cobb-Douglas: qualquer procura Marshalliana bem-comportada as satisfaz, seja qual for a forma de U .

Nem Toda a Procura é Tão Simples

Para outras formas de utilidade, a curva de procura pode não ser uma hipérbole suave: pode depender do outro preço, ter segmentos retos, ou até “saltos”.

A Cobb-Douglas é um caso particularmente simples e bem comportado, ótimo para aprender o método. 



Questões de Revisão (Parte 3)

Pergunta 7

Para uma Cobb-Douglas, a procura do bem 1, $x_1^*(p_1, p_2, W)$:

- a. Depende de p_1 , p_2 e W
- b. Depende só de p_2
- c. Depende só de p_1 e W , não de p_2
- d. Não depende de nenhum preço

Resposta: c) $x_1^* = \alpha W / p_1$ não tem p_2 .

Pergunta 8

Se duplicarmos p_1 , p_2 e W todos ao mesmo tempo, a escolha ótima (x_1^*, x_2^*) :

- a. Duplica também
- b. Mantém-se exatamente igual
- c. Cai para metade
- d. Depende de α



Pergunta 8 (Solução)



Solução

Resposta: b) Duplicar tudo não muda a reta orçamental: $p_1x_1 + p_2x_2 = W$ e $2p_1x_1 + 2p_2x_2 = 2W$ são a mesma equação. Mesma restrição, preferências e escolha. Não há ilusão monetária.

Pergunta 9 (Exercício)

Um consumidor tem $U = x_1^{0,5} x_2^{0,5}$ e $W = 300$, $p_2 = 5$.

a) Calcule x_1^* para $p_1 = 10$.

b) Calcule x_1^* para $p_1 = 20$. A lei da procura confirma-se?



Pergunta 9 (Solução)



Solução

a) $x_1^* = 0,5 \times 300/10 = 15$

b) $x_1^* = 0,5 \times 300/20 = 7,5$

O preço duplicou e a quantidade procurada caiu de 15 para 7,5: consistente com a lei da procura.

? E a Seguir?

Hoje derivámos a procura de **um** consumidor, a partir da maximização da sua utilidade.

Mas o mercado tem muitos consumidores, e a procura Marshalliana individual nem sempre é fácil de somar ou de manipular diretamente.

Na próxima aula: passamos para modelos de **procura de mercado**, com ênfase na forma **linear**, muito usada na prática, e medimos a sensibilidade da procura ao preço com a **elasticidade**. 