

Microeconomia

Custos de Produção



Tópicos de Hoje

- Da procura à oferta: passamos para o lado do **produtor**
- A função de produção: dos fatores ao produto, e da produção ao custo
- Lucro, receita e custo; custos fixos e variáveis; o CMg como tangente
- Custo médio e custo marginal, e a relação entre eles
- Curto prazo vs longo prazo e economias de escala

Parte 1: A Função de Produção





Onde Ficámos

Toda a primeira parte foi sobre o **consumidor**: quem compra, e como se comporta a procura.

Agora viramos para o **produtor**: quem vende. É o outro lado do mercado. 🏭

O objetivo da empresa é escolher a quantidade que **maximiza o lucro**. Mas antes de falar de custos e lucros, uma pergunta mais básica: como é que uma empresa **produz**?



Dos Fatores ao Produto

Uma empresa transforma **fatores de produção** em **produto**:

$$\underbrace{L, K, \text{matérias-primas}, \dots}_{\text{fatores (inputs)}} \xrightarrow{F} \underbrace{Q}_{\text{produto (output)}}$$

A **função de produção** $Q = F(L, K, \dots)$ diz quanto produto sai de cada combinação de fatores: baristas e máquinas fazem cafés, costureiras e teares fazem camisas. ☕ 👕



Fatores Fixos e Fatores Variáveis

No **curto prazo**, alguns fatores não se conseguem ajustar (o capital K : fábrica, máquinas); outros ajustam-se rapidamente (o trabalho L : horas, turnos, contratações).

No **longo prazo**, todos os fatores são ajustáveis.

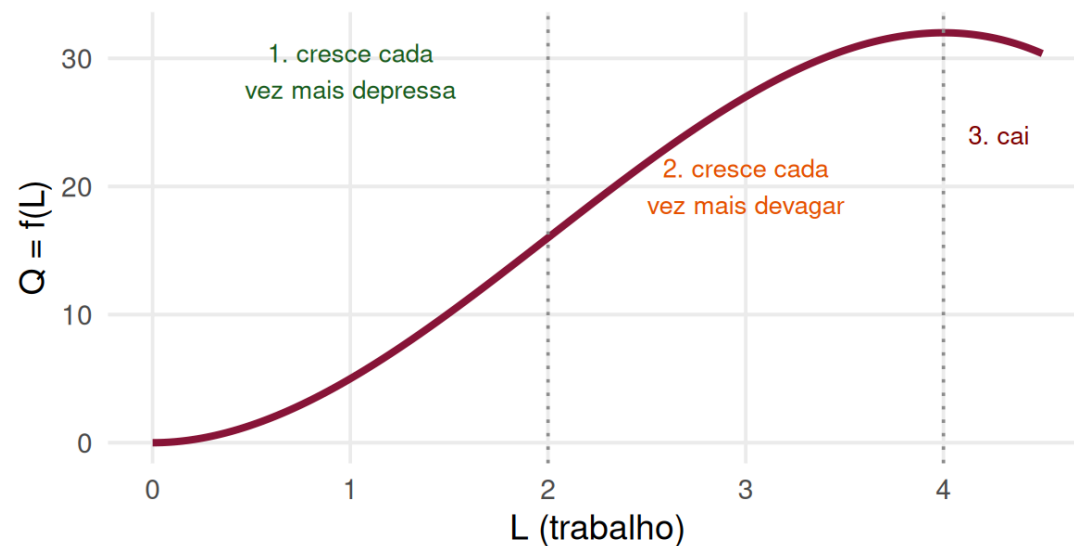
E os custos **herdam** esta divisão:

- Fatores fixos → **custos fixos** (a renda da fábrica paga-se, produza-se muito ou nada)
- Fatores variáveis → **custos variáveis** (mais produção, mais horas de trabalho, mais salários)



A Forma Clássica da Função de Produção

No curto prazo, com K fixo, só L mexe: $Q = f(L)$. A forma típica tem **três fases**:

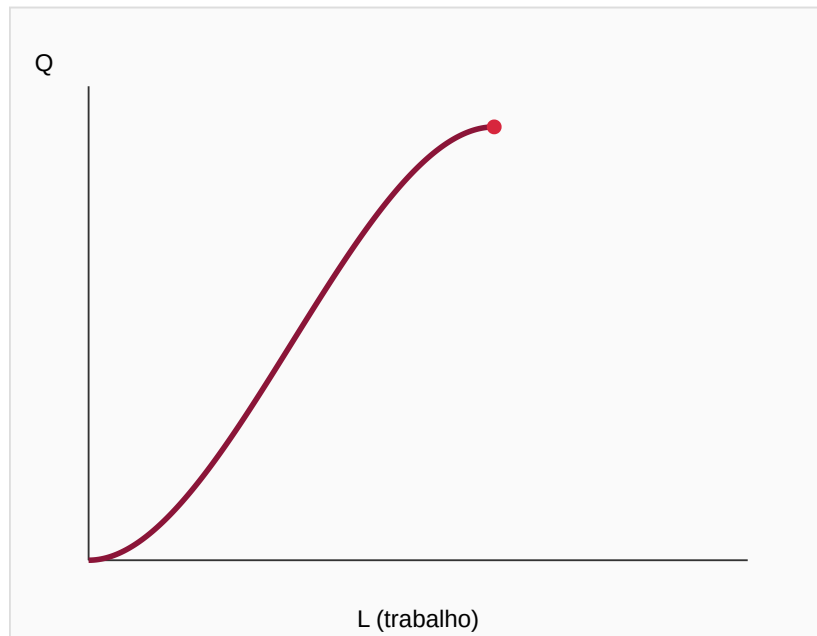


1. Especialização e divisão do trabalho. **2.** O fator fixo aperta: **rendimentos marginais decrescentes**. **3.** Demasiados trabalhadores para a mesma fábrica: atrapalham-se.



Gráfico Interativo: Da Produção ao Custo

Segue os três passos, pela ordem dos botões. O slider controla o salário w por unidade de trabalho.



1 Produção: $Q = f(L)$

2 Eixo em euros: $L \times w$

3 Virar: $CV(Q)$

◀ Reverter

w (salário): 1.00 €



Cada nível de trabalho L dá um produto Q , até à produção máxima ($L = 4$, o ponto vermelho): daí em diante não valia a pena contratar.



O Custo Herda a Forma da Produção

Repara no que o gráfico interativo acabou de mostrar: o $CV(Q)$ é a função de produção **vista ao contrário**, medida em euros.

- Onde f cresce **cada vez mais depressa**, o custo cresce **cada vez mais devagar** (cada euro de trabalho rende mais produto)
- Onde f cresce **cada vez mais devagar** (rendimentos marginais decrescentes), o custo cresce **cada vez mais depressa**

As curvas de custo não caem do céu: **nascem da tecnologia f** e do preço dos fatores. É este $CV(Q)$ que vamos usar em toda a aula. 



Questões de Revisão (Parte 1)

Pergunta 1

Os custos fixos existem no curto prazo porque:

- a. As empresas têm sempre dívidas para pagar
- b. Há fatores de produção que não se conseguem ajustar nesse horizonte
- c. Os salários estão definidos por contrato
- d. A produção nunca pode ser zero

Resposta: b) São os custos dos **fatores fixos**: pagam-se qualquer que seja Q , mesmo $Q = 0$.

Pergunta 2

A zona em que $CV(Q)$ cresce cada vez mais depressa (convexa) reflete:

- a. Economias de escala
- b. A subida do salário w
- c. Os rendimentos marginais decrescentes do fator variável
- d. A existência de custos fixos elevados

Resposta: c) Quando cada trabalhador adicional acrescenta menos produto, cada unidade adicional de Q exige mais trabalho, logo custa mais.

Pergunta 3 (Exercício)

Uma empresa tem função de produção $Q = f(L) = 10\sqrt{L}$ e paga salário $w = 20$ por unidade de trabalho.

- a) Inverta f para obter o trabalho necessário $L(Q)$ e escreva o custo variável $CV(Q)$.
- b) Com custos fixos $CF = 45$, escreva $C(Q)$.
- c) Calcule o custo marginal. É crescente ou decrescente? Porquê?

✓ Pergunta 3 (Solução)

💡 Solução

- a) $Q = 10\sqrt{L} \Rightarrow L = (Q/10)^2 = Q^2/100$. $CV(Q) = w \cdot L(Q) = 20 Q^2/100 = Q^2/5$.
- b) $C(Q) = 45 + Q^2/5$.
- c) $CMg = dC/dQ = 2Q/5$: **crescente**. f tem rendimentos marginais decrescentes ($\sqrt{L}$ achata), logo cada unidade extra de Q exige cada vez mais trabalho, e o custo marginal aumenta.

Parte 2: Custo, Receita e Lucro





Lucro = Receita – Custo

O **lucro económico** é a diferença entre o que entra e o que sai:

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q), \quad R(Q) = P \cdot Q$$

A empresa controla a **quantidade** Q que produz. Hoje concentramo-nos em $C(Q)$, a estrutura de custos. O preço e a receita entram na aula seguinte. 🎯



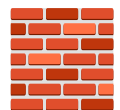
Qual dos Dois Lucros?

O π que vamos maximizar é o **económico**, o da aula 1: aquele em que $C(Q)$ inclui os custos de oportunidade, e não só os custos com fatura.



Recorda a loja de roupa: 20.000 euros de lucro contabilístico e –15.000 de lucro económico, porque os 35.000 do emprego alternativo também são um custo.

Daqui em diante, “**lucro**” **significa sempre lucro económico**, e essa escolha tem uma consequência forte: lucro zero não significa uma empresa em dificuldades, significa uma empresa que está a cobrir exatamente o que os seus recursos valeriam na melhor alternativa. Voltamos a isto na próxima aula. 



CF e CV, Agora como Funções

Nada de novo: é a divisão da Parte 1, agora escrita **como função da quantidade**:

$$C(Q) = \underbrace{\text{CF}}_{\text{não depende de } Q} + \underbrace{\text{CV}(Q)}_{\text{cresce com } Q}$$

- **CF**: existe mesmo com $Q = 0$ (renda, seguros)
- **CV(Q)**: o custo do trabalho que produz Q (a tua Pergunta 3!)



A curva de C é a de CV deslocada CF para cima.

Uma Tabela de Custos

Com $CF = 20$ e $CV(Q) = 5Q$:

Q	CF	CV	$C = CF + CV$	CMg	$CTMe = C/Q$
1	20	5	25	5	25
2	20	10	30	5	15
4	20	20	40	5	10
10	20	50	70	5	7

Repara: o custo **por unidade** (CTMe) cai à medida que Q cresce, porque os 20 de custo fixo se **diluem** por mais unidades.





Custos por Unidade

$$CTMe = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{CF}{Q} + \frac{CV(Q)}{Q}$$

- **Custo total médio:** $CTMe = C/Q$
- **Custo variável médio:** $CVMe = CV/Q$
- **Custo fixo médio:** CF/Q , sempre decrescente

A distância entre $CTMe$ e $CVMe$ é CF/Q , que **diminui** com Q : as duas curvas aproximam-se.

Custo Marginal

O **custo marginal** é o custo de produzir **mais uma** unidade:

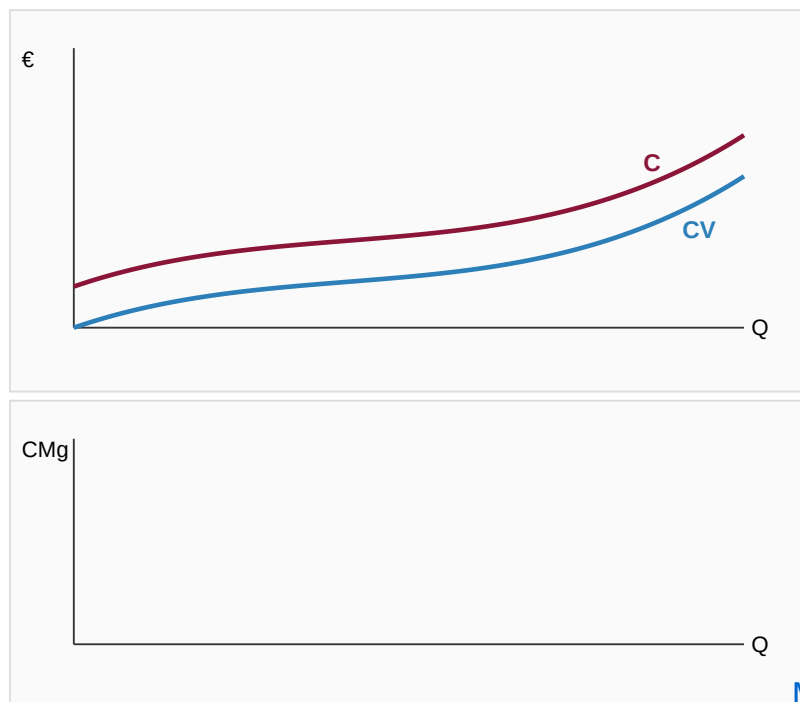
$$CMg = \frac{dC}{dQ} = \frac{d CV}{dQ}$$

Repara: o CMg depende **só** do custo variável. O custo fixo não muda quando se produz mais uma unidade, por isso não entra no CMg. 



Gráfico Interativo: A Tangente que Desenha o CMg

Arrasta o slider de Q : a tangente percorre C e CV (declives **iguais!**) e vai desenhando o CMg em baixo. Muda CF : o C desloca-se, a tangente e o CMg não mudam.



👁️ Mostrar tangente e CMg

Q: 3.0



CF (custo fixo): 30 €



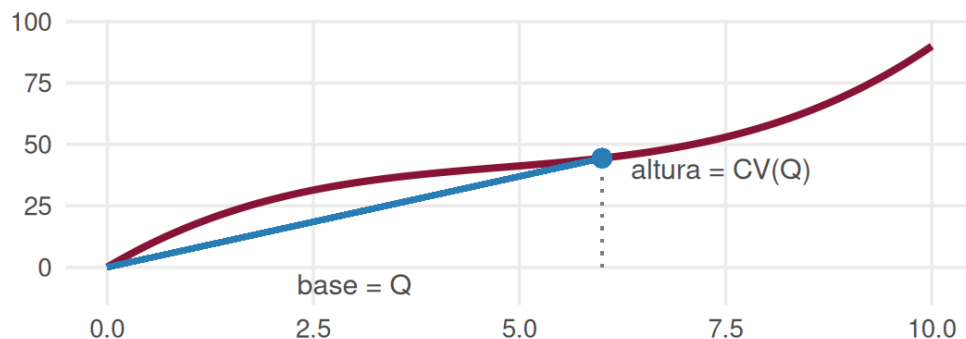
Declive da tangente = ?

Duas curvas: C (custo total) e CV (custo variável), separadas pela distância CF . Carrega no botão para veres a **tangente**.



O Raio que Mede a Média

A tangente mede a **margem**. E a média? Liga a **origem** a um ponto da curva com um **raio**:



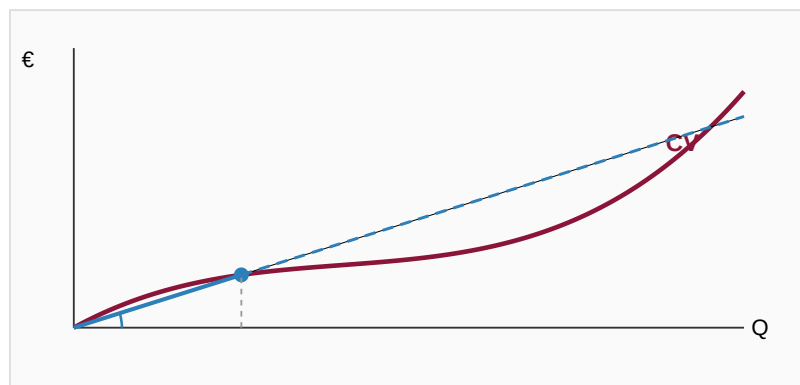
$$\text{declive do raio} = \frac{\text{altura}}{\text{base}} = \frac{CV(Q)}{Q} = \text{CVMe}$$

O declive do raio é o **valor médio**. Na curva do custo total, o mesmo raio dá o CTMe.  Microeconomia — ISEL



Gráfico Interativo: O Raio que Desenha o CVMe

Arrasta Q e repara no **ângulo** do raio: primeiro fecha (a média cai), depois abre (a média aumenta). Em baixo, o CVMe desenha-se ponto a ponto.

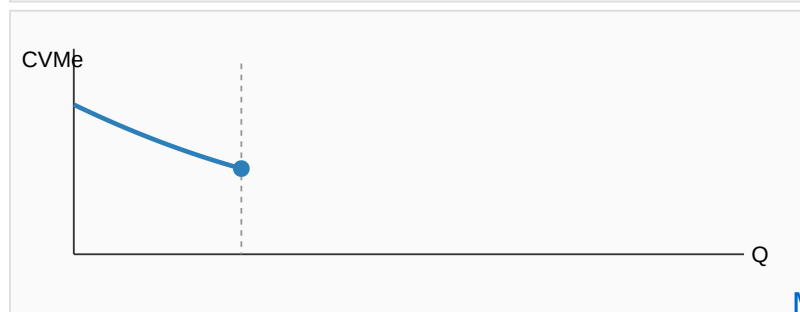


Q: 3.0



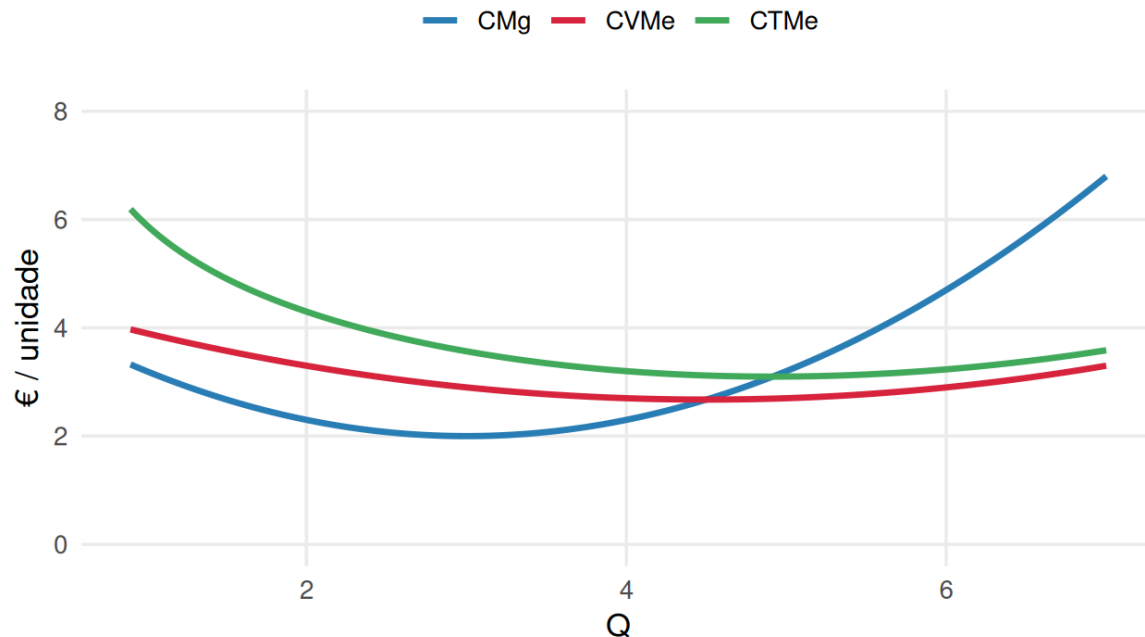
Declive do raio = **11.4 €/unidade** = CVMe(Q)

O declive do raio é a **média** $CV(Q)/Q$. Procura o Q em que o raio fica **tangente** à curva: é o ângulo mais fechado que o raio consegue.



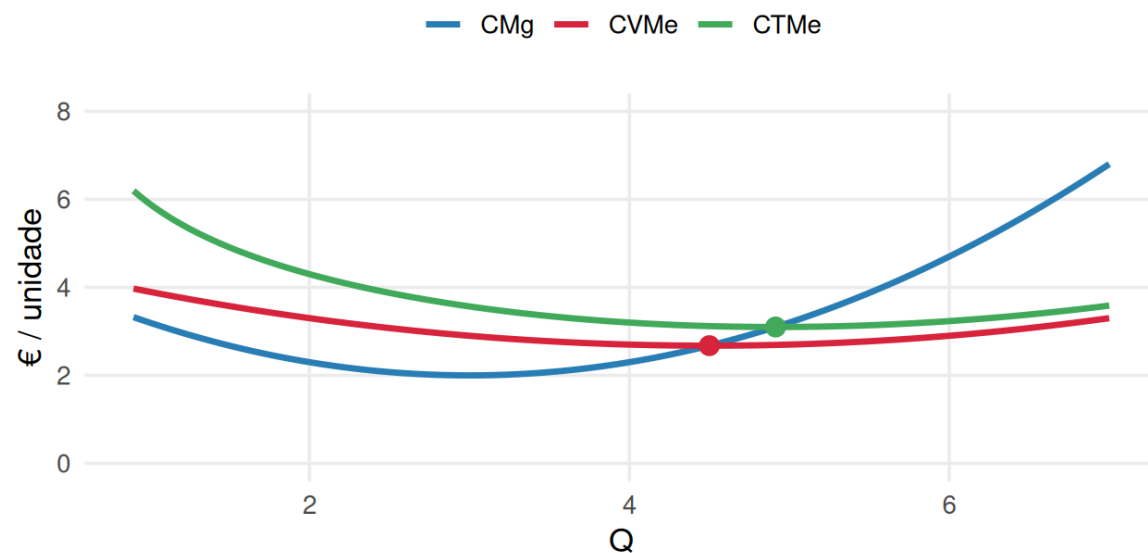


As Curvas de Custo



Forma típica em **U**: os custos médios primeiro diminuem (diluição dos fixos, produtividade) e depois aumentam. O CMg tem a sua própria curva. 

O CMg Cruza as Médias no Mínimo



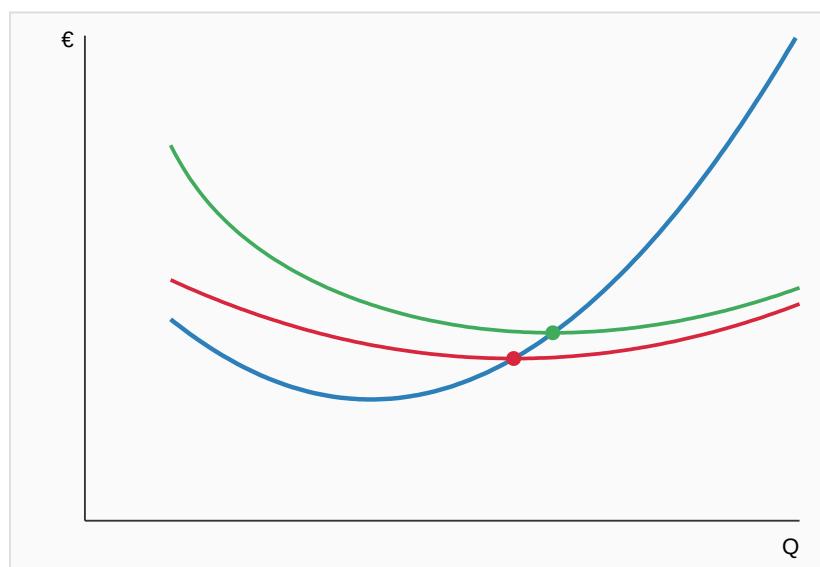
Analogia com notas: se a **nota da próxima cadeira** (marginal) for menor que a tua **média**, a média diminui; se for maior, aumenta. O CMg puxa as médias.

Por isso o CMg cruza o CVMe e o CTMe **exatamente nos seus mínimos**: é aí que a média deixa de diminuir e começa a aumentar. 



Gráfico Interativo: As Curvas de Custo

Arrasta o custo fixo. O CMg e o CVMe não mudam; o CTMe aumenta e o seu mínimo desloca-se. 



CF: 2,0



■ CMg ■ CVMe ■ CTMe

mín. CVMe em $Q \approx 4,5$

mín. CTMe em $Q = 4,9 (= 3,10)$



Questões de Revisão (Parte 2)

Pergunta 4

Se $C(Q) = 200 + 10Q + Q^2$, qual é o custo marginal?

- a. $CMg = 200 + 10Q$
- b. $CMg = 10 + Q$
- c. $CMg = 10 + 2Q$
- d. $CMg = 200/Q + 10 + Q$

Resposta: c) $CMg = dC/dQ = 10 + 2Q$. O custo fixo (200) desaparece na derivada.

Pergunta 5

Quando o custo marginal está **abaixo** do custo total médio, o CTMe está a:

- a. Diminuir
- b. Aumentar
- c. Manter-se constante
- d. Nada se pode dizer

Resposta: a) Se a unidade adicional custa menos do que a média, puxa a média para baixo. O CTMe só começa a aumentar quando $CM_g > CTMe$.

Pergunta 6 (Exercício)

Uma empresa tem $C(Q) = 50 + 8Q + 2Q^2$.

- a) Identifique CF, CV(Q), CTMe, CVMe e CMg.
- b) Determine o Q que minimiza o CTMe e o seu valor.

Solução

a) $CF = 50$; $CV = 8Q + 2Q^2$; $CTMe = 50/Q + 8 + 2Q$; $CVMe = 8 + 2Q$;
 $CMg = 8 + 4Q$.

b) $\frac{d CTMe}{dQ} = -\frac{50}{Q^2} + 2 = 0 \Rightarrow Q^2 = 25 \Rightarrow Q = 5$. $CTMe(5) = 10 + 8 + 10 = 28$.

Confirmação: $CMg(5) = 8 + 20 = 28 \checkmark$.

Parte 3: Curto e Longo Prazo



Curto vs. Longo Prazo

Recorda a Parte 1: a distinção **não é o calendário**, mas sim quais os fatores que a empresa consegue ajustar.

- **Curto prazo:** pelo menos um fator é **fixo** (tipicamente o capital: máquinas, instalações). Ajusta a produção contratando mais ou menos trabalho, mas não muda a dimensão da fábrica.
- **Longo prazo:** **todos** os fatores são variáveis. A empresa escolhe a escala de operação.

As curvas de custo que desenhámos são de **curto prazo**: têm um custo fixo. 



A Curva de Custos de Longo Prazo

No longo prazo a empresa escolhe a escala. A forma do CTMe de longo prazo depende de como o custo unitário evolui com a **dimensão**:

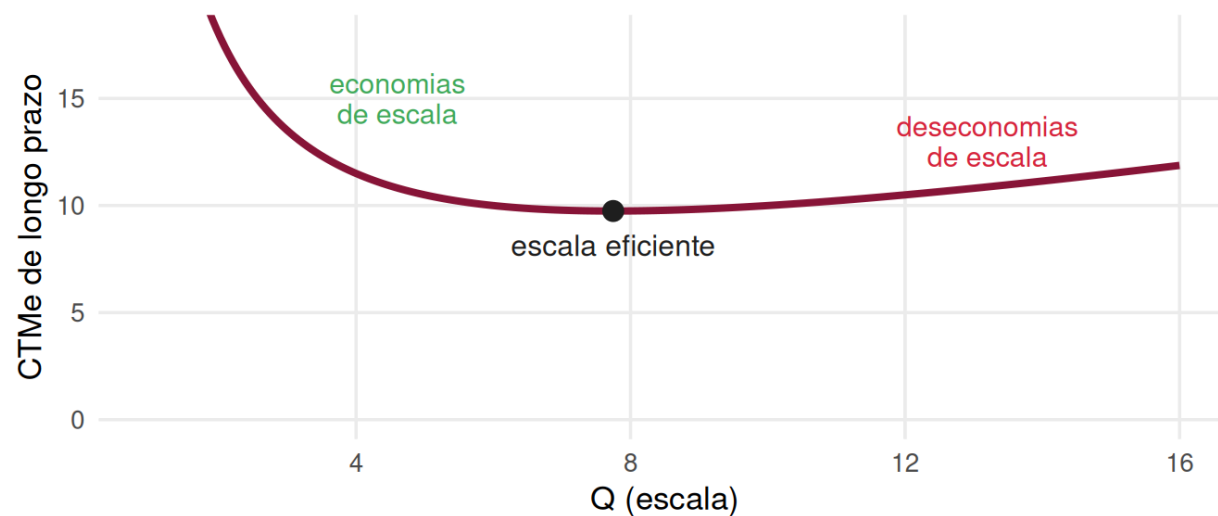
- **Economias de escala: CTMe decrescente**
- **Deseconomias de escala: CTMe crescente**
- **Rendimentos constantes: CTMe constante**



U

O Custo Médio de Longo Prazo em

Juntando os dois efeitos: primeiro **economias** (o custo unitário diminui), depois **deseconomias** (aumenta).



O ponto mais baixo é a **escala eficiente**: a dimensão que produz ao menor custo por unidade. 🎯



Economias de Escala

CTMe decrescente: produzir mais reduz o custo por unidade.

Fontes típicas:

- Custos fixos elevados diluídos por grande volume (telecomunicações, infraestruturas)
- Especialização do trabalho
- Descontos de compra em grande escala

Setores com grandes economias de escala tendem a ter poucas empresas grandes: é a raiz do **monopólio natural**. 



Deseconomias de Escala

CTMe crescente: a partir de certa dimensão, crescer **aumenta** o custo por unidade.

Fontes típicas:

- Complexidade organizacional (coordenação mais difícil)
- Burocracia interna
- Problemas de comunicação e controlo

A empresa fica “grande demais” para funcionar bem. 🐘

Escala Eficiente

A **escala eficiente** é o Q que **minimiza** o CTMe de longo prazo.

- À **esquerda**: economias de escala, vale a pena crescer.
- À **direita**: deseconomias, a empresa está grande demais.

A escala eficiente determina a dimensão “natural” das empresas de um setor. Escala eficiente grande face ao mercado → poucas empresas (setor concentrado). 



Questões de Revisão (Parte 3)

Pergunta 7

A distinção entre curto e longo prazo depende de:

- a. Ser mais ou menos de um ano
- b. O nível de custos fixos
- c. A dimensão da empresa
- d. Quais os fatores de produção que podem ser ajustados

Resposta: d) É funcional, não temporal: no curto prazo há pelo menos um fator fixo; no longo prazo todos são variáveis.

Pergunta 8

Uma indústria com fortes economias de escala tem:

- a. Custos fixos nulos
- b. CTMe de longo prazo decrescente com a produção
- c. Custo marginal constante
- d. Custo variável superior ao fixo

Resposta: b) Economias de escala significam exatamente que o CTMe de longo prazo diminui quando a produção aumenta.

Pergunta 9 (Exercício)

Uma empresa tem $C(Q) = 200 + 12Q + 0,5Q^2$.

- a) Determine CF, CV, CTMe, CVMe e CMg.
- b) Encontre a escala eficiente (mínimo do CTMe) e o custo mínimo.
- c) Verifique que aí $CMg = CTMe$.

Solução

a) $CF = 200$; $CV = 12Q + 0,5Q^2$; $CTMe = 200/Q + 12 + 0,5Q$; $CVMe = 12 + 0,5Q$; $CMg = 12 + Q$.

b) $-200/Q^2 + 0,5 = 0 \Rightarrow Q^2 = 400 \Rightarrow Q = 20$. $CTMe(20) = 10 + 12 + 10 = 32$.

c) $CMg(20) = 12 + 20 = 32 = CTMe(20) \checkmark$.

? E a Seguir?

Hoje montámos a estrutura de **custos** da empresa: fixos e variáveis, médios e marginais, no curto e no longo prazo.

Na próxima aula: juntamos a **receita** e o **preço**. A empresa maximiza o lucro onde a receita marginal iguala o custo marginal, e daí saem o monopólio, a concorrência perfeita e a **curva de oferta**. 