

O Problema do Consumidor: a Solução por Cálculo

Apêndice opcional à aula *Utilidade e Problema do Consumidor* (LN04)

Índice

1	O problema	2
1.1	Recordar a solução gráfica	2
2	O método da substituição	2
3	Tentativa direta: porque é penoso	2
4	O truque do logaritmo	3
4.1	Ferramentas de cálculo	3
5	Derivação passo a passo	3
5.1	Condição de primeira ordem	4
5.2	É mesmo um máximo?	4
6	As procuras Marshallianas	5
7	A tangência surge como consequência	5
8	Cobb-Douglas geral (não normalizada)	5
9	Exemplo numérico completo	5
10	Em resumo	6

Este apêndice é **opcional**. Na aula resolvemos o problema do consumidor **graficamente**: o cabaz ótimo é o ponto de **tangência** entre a curva de indiferença e a reta orçamental, o que dá o sistema $|TMS| = p_1/p_2$ mais a restrição. Aqui mostramos o mesmo resultado obtido **por cálculo**, maximizando diretamente a utilidade. É para quem quiser ver a mecânica completa, ao pormenor. O exame não exige este método.

1 O problema

Um consumidor tem preferências Cobb-Douglas (na forma normalizada, com expoentes a somar 1),

$$U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1),$$

e enfrenta preços $p_1, p_2 > 0$ e um rendimento $W > 0$. O **problema do consumidor** é escolher o cabaz admissível que dá mais satisfação:

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \quad \text{sujeito a} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = W.$$

Usamos a restrição com **igualdade** (e não $\leq$) porque a não saciedade garante que o consumidor gasta todo o rendimento: deixar dinheiro por gastar nunca é ótimo.

1.1 Recordar a solução gráfica

Geometricamente, a curva de indiferença mais alta que ainda toca a reta orçamental toca-a num único ponto, onde as duas são **tangentes**. Aí, o declive da curva de indiferença (a Taxa Marginal de Substituição, TMS) iguala o declive da reta orçamental; em valor absoluto:

$$|\text{TMS}| = \frac{p_1}{p_2} \quad (\text{segunda lei de Gossen}).$$

Juntando esta condição à restrição orçamental, temos duas equações e duas incógnitas, e resolvemos. O objetivo deste apêndice é mostrar que a mesma condição **também surge** se maximizarmos U diretamente, sem a assumir de partida.

2 O método da substituição

A restrição tem duas incógnitas e uma equação, por isso permite escrever uma variável em função da outra. Isolando x_2 :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = W \quad \implies \quad x_2 = \frac{W - p_1 x_1}{p_2}.$$

Substituindo em U , a utilidade passa a depender de **uma só variável**:

$$U(x_1) = x_1^\alpha \left(\frac{W - p_1 x_1}{p_2} \right)^{1-\alpha}.$$

Passámos de um problema com uma restrição para um problema de máximo de uma função de uma variável, que sabemos resolver: derivar e igualar a zero.

3 Tentativa direta: porque é penoso

Podíamos derivar $U(x_1)$ tal como está. Escrevendo $g(x_1) = (W - p_1 x_1)/p_2$, com $g'(x_1) = -p_1/p_2$, temos $U = x_1^\alpha g^{1-\alpha}$ e, pela **regra do produto** e pela **regra da cadeia**,

$$U'(x_1) = \alpha x_1^{\alpha-1} g^{1-\alpha} + x_1^\alpha (1-\alpha) g^{-\alpha} g'(x_1).$$

Igualando a zero e substituindo $g' = -p_1/p_2$:

$$\alpha x_1^{\alpha-1} g^{1-\alpha} = (1-\alpha) \frac{p_1}{p_2} x_1^\alpha g^{-\alpha}.$$

Dividindo ambos os lados por $x_1^{\alpha-1} g^{-\alpha}$ (ambos positivos):

$$\alpha g = (1-\alpha) \frac{p_1}{p_2} x_1.$$

Chega-se ao mesmo sítio, mas com potências fracionárias e a regra do produto a atrapalhar. Há um caminho muito mais limpo.

4 O truque do logaritmo

A utilidade é **ordinal**: só a ordenação dos cabazes importa, não os números. Como $\ln$ é uma função **estritamente crescente**, o cabaz que maximiza U é exatamente o mesmo que maximiza $\ln U$. Podemos então maximizar

$$\ln U = \ln(x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}) = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2,$$

onde usámos $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ e $\ln(x^a) = a \ln x$. O logaritmo transforma o **produto numa soma**, e somas derivam-se termo a termo.

4.1 Ferramentas de cálculo

Duas ferramentas que vamos usar de seguida.

Derivada de $\ln(f(x))$. Pela regra da cadeia, a derivada de $\ln(u)$ em ordem a u é $1/u$, multiplicada pela derivada de $u = f(x)$:

$$\frac{d}{dx} \ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Verificação com $f(x) = x^2$: diretamente, $\ln(x^2) = 2 \ln x$ tem derivada $2/x$; pela fórmula, $f'/f = 2x/x^2 = 2/x$. Coincide.

Propriedades do logaritmo.

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x,$$

e a derivada de base $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$.

5 Derivação passo a passo

Substituindo $x_2 = (W - p_1 x_1)/p_2$ em $\ln U$ e usando $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$:

$$\ln U(x_1) = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) [\ln(W - p_1 x_1) - \ln p_2].$$

Distribuindo o $(1 - \alpha)$, ficam três termos independentes:

$$\ln U(x_1) = \underbrace{\alpha \ln x_1}_{\text{termo 1}} + \underbrace{(1 - \alpha) \ln(W - p_1 x_1)}_{\text{termo 2}} - \underbrace{(1 - \alpha) \ln p_2}_{\text{termo 3}}.$$

Derivando termo a termo em ordem a x_1 :

- **Termo 1:** $\frac{d}{dx_1} [\alpha \ln x_1] = \frac{\alpha}{x_1}$.
- **Termo 2:** pela fórmula de $\ln(f(x))$, com $f = W - p_1 x_1$ e $f' = -p_1$,

$$\frac{d}{dx_1} [(1 - \alpha) \ln(W - p_1 x_1)] = -\frac{(1 - \alpha) p_1}{W - p_1 x_1}.$$

- **Termo 3:** p_2 é um preço fixo, logo $(1 - \alpha) \ln p_2$ é uma **constante** e a sua derivada é zero. Este termo desaparece, que é precisamente a vantagem de ter separado o logaritmo do quociente.

5.1 Condição de primeira ordem

Somando os termos e igualando a zero:

$$\frac{d \ln U}{dx_1} = \frac{\alpha}{x_1} - \frac{(1 - \alpha) p_1}{W - p_1 x_1} = 0 \iff \frac{\alpha}{x_1} = \frac{(1 - \alpha) p_1}{W - p_1 x_1}.$$

Multiplicando em cruz:

$$\alpha (W - p_1 x_1) = (1 - \alpha) p_1 x_1 \implies \alpha W = (1 - \alpha) p_1 x_1 + \alpha p_1 x_1 = p_1 x_1,$$

donde

$$\boxed{x_1^* = \frac{\alpha W}{p_1}}.$$

Voltando à restrição, $x_2^* = (W - p_1 x_1^*)/p_2 = (W - \alpha W)/p_2$, ou seja

$$\boxed{x_2^* = \frac{(1 - \alpha) W}{p_2}}.$$

5.2 É mesmo um máximo?

A condição de primeira ordem localiza um ponto crítico; falta confirmar que é um **máximo**. Derivando $\ln U(x_1)$ outra vez:

$$\frac{d^2 \ln U}{dx_1^2} = -\frac{\alpha}{x_1^2} - \frac{(1 - \alpha) p_1^2}{(W - p_1 x_1)^2} < 0$$

para todo o $x_1 \in (0, W/p_1)$. Como $\ln U$ é **estritamente côncava** nesse intervalo, o ponto crítico é o **máximo global**. Não há soluções de canto enquanto $\alpha \in (0, 1)$, porque $\ln U \rightarrow -\infty$ quando $x_1 \rightarrow 0$ ou $x_1 \rightarrow W/p_1$.

6 As procuras Marshallianas

As quantidades ótimas, vistas como funções dos preços e do rendimento, são as **procuras Marshallianas**:

$$x_1^*(p_1, p_2, W) = \frac{\alpha W}{p_1}, \quad x_2^*(p_1, p_2, W) = \frac{(1 - \alpha) W}{p_2}.$$

Repare-se em duas propriedades típicas da Cobb-Douglas: cada procura depende **apenas do seu próprio preço** e do rendimento, e as **quotas de despesa** são constantes,

$$p_1 x_1^* = \alpha W, \quad p_2 x_2^* = (1 - \alpha) W,$$

isto é, o consumidor gasta sempre a fração α do rendimento no bem 1 e $(1 - \alpha)$ no bem 2, seja qual for o nível de preços.

7 A tangência surge como consequência

Não assumimos a tangência em lado nenhum, mas ela aparece. Calculando $|TMS|$ no cabaz ótimo (recorde-se que, para a Cobb-Douglas, $|TMS| = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{x_2}{x_1}$):

$$|TMS|(x_1^*, x_2^*) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \frac{x_2^*}{x_1^*} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \frac{(1 - \alpha)W/p_2}{\alpha W/p_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Reencontramos a **segunda lei de Gossen**, $|TMS| = p_1/p_2$, agora como **resultado** da maximização, e não como ponto de partida. Os dois métodos, o gráfico e o cálculo, são a mesma coisa vista de dois ângulos.

8 Cobb-Douglas geral (não normalizada)

E se os expoentes não somarem 1, $U = x_1^a x_2^b$ com $a, b > 0$? Como a utilidade é ordinal, elevar U a $1/(a + b)$ não muda a ordenação e recupera a forma normalizada com

$$\alpha = \frac{a}{a + b}.$$

Logo, sem repetir contas,

$$x_1^* = \frac{a}{a + b} \cdot \frac{W}{p_1}, \quad x_2^* = \frac{b}{a + b} \cdot \frac{W}{p_2}.$$

As quotas de despesa são $\frac{a}{a+b}$ e $\frac{b}{a+b}$: são os pesos **relativos** dos expoentes que contam, não os seus valores absolutos.

9 Exemplo numérico completo

Sejam $\alpha = 0,6$, $W = 1000$, $p_1 = 20$, $p_2 = 10$.

A condição de primeira ordem $\frac{\alpha}{x_1} = \frac{(1-\alpha)p_1}{W - p_1 x_1}$ fica

$$\frac{0,6}{x_1} = \frac{0,4 \times 20}{1000 - 20 x_1} \implies 0,6 (1000 - 20 x_1) = 8 x_1 \implies 600 = 8 x_1 + 12 x_1 = 20 x_1,$$

logo $x_1^* = 30$. Pela fórmula, confirma-se: $x_1^* = 0,6 \times 1000 / 20 = 30$ e $x_2^* = 0,4 \times 1000 / 10 = 40$.

Verificações.

- *Orçamento:* $p_1x_1^* + p_2x_2^* = 20 \times 30 + 10 \times 40 = 600 + 400 = 1000 = W$. Gasta tudo.
- *Quotas de despesa:* $600/1000 = 0,6 = \alpha$ e $400/1000 = 0,4 = 1 - \alpha$.
- *Tangência:* $|\text{TMS}| = \frac{0,6}{0,4} \cdot \frac{40}{30} = 1,5 \times \frac{4}{3} = 2 = \frac{p_1}{p_2} = \frac{20}{10}$. A segunda lei de Gossen verifica-se.

10 Em resumo

1. Isolar x_2 na restrição e substituir em U (uma variável).
2. Maximizar $\ln U$ em vez de U (mesmo ótimo, produto vira soma).
3. Derivar termo a termo, igualar a zero, resolver: $x_1^* = \alpha W/p_1$.
4. Voltar à restrição: $x_2^* = (1 - \alpha)W/p_2$.
5. A tangência $|\text{TMS}| = p_1/p_2$ e as quotas de despesa constantes saem como consequências.

O caminho gráfico da aula chega exatamente ao mesmo cabaz, com menos álgebra. Este apêndice serve só para mostrar que os dois pontos de vista são consistentes, ao pormenor.