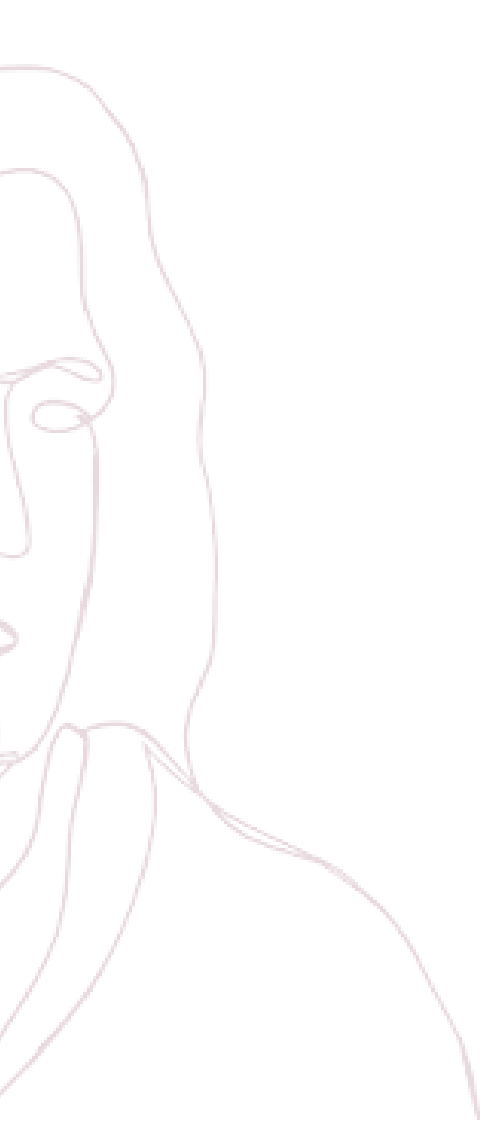




# Microeconomia

Aplicação: Consumo Intertemporal



## Tópicos de Hoje

- O tempo como uma dimensão nova: consumir hoje ou consumir amanhã
- Construir a restrição orçamental intertemporal, passo a passo
- Poupar e pedir emprestado, vistos como um só mecanismo
- Uma utilidade com desconto do futuro (o fator  $\beta$ ) e a tangência da aula anterior, aplicados ao tempo
- Poupador ou devedor? E o que muda quando a taxa de juro aumenta

# Parte 1: A Restrição Orçamental Intertemporal





## Onde Ficámos

Nas últimas aulas, o consumidor resolveu sempre o mesmo problema: distribuir um rendimento  $W$  entre **dois bens diferentes**, 1 e 2, cujas quantidades são  $x_1$  e  $x_2$ , **no mesmo momento**.

Repara numa coisa que nunca dissemos explicitamente: em todo esse problema, **não havia tempo**. Era uma fotografia, um instante único.

Hoje introduzimos o tempo pela primeira vez. 



## Uma Dimensão Que Faltava

E se, em vez de dois bens, tivermos o **mesmo bem** (“consumo”, em euros) disponível em **dois momentos diferentes**?

Chamamos  $c_1$  ao consumo **hoje** (período 1) e  $c_2$  ao consumo **amanhã** (período 2).

Para manter tudo simples, vamos ficar só com **dois períodos**. As ideias generalizam-se para mais períodos, mas a intuição toda já aparece com dois. 🙌

## O Cenário Mais Simples: Sem Banco

Suponha que a Maria recebe  $W_1$  euros hoje e sabe que vai receber  $W_2$  euros amanhã. Não existe nenhum banco, nenhuma forma de guardar ou adiantar dinheiro. Nem colchão para esconder as notas! 🛏

Neste mundo, a escolha está feita antes de começar:  $c_1 = W_1$  e  $c_2 = W_2$ . Não há problema de otimização nenhum, porque não há **alternativa**. 😐

Para termos um problema de escolha interessante, precisamos de uma forma de **mover recursos entre períodos**.



## Introduzindo o Banco

Suponha agora que existe um banco onde a Maria pode **poupar** ou **pedir emprestado**, à mesma taxa de juro  $r$ .

Chamamos  $S$  à poupança do período 1:  $S = W_1 - c_1$ .

- $S > 0$ : a Maria consome menos do que recebe hoje e **poupa** a diferença.
- $S < 0$ : a Maria consome mais do que recebe hoje, ou seja, **pede emprestado**.

Poupar e pedir emprestado são, matematicamente, **a mesma operação** com sinal trocado. 💡

## **1** Passo 1: O Que Sobra Para o Período 2

No período 2, a Maria recebe  $W_2$ , mais o que guardou no banco, já com juros.

$$c_2 = W_2 + (1 + r) S$$

Se  $S > 0$  (poupou), o banco devolve o capital mais juros: mais consumo amanhã. Se  $S < 0$  (pediu emprestado), tem de devolver capital mais juros: menos consumo amanhã. A fórmula funciona nos dois casos. 

## 2 Passo 2: Substituir $S$

Sabemos que  $S = W_1 - c_1$ . Substituindo em  $c_2 = W_2 + (1 + r)S$ :

$$c_2 = W_2 + (1 + r)(W_1 - c_1)$$

Agora  $c_2$  está escrito em função de  $c_1$  e das constantes  $W_1, W_2, r$ : exatamente o mesmo tipo de manobra que já fizemos com a restrição orçamental estática. 

### 3 Passo 3: Rearranjar

Distribuindo o  $(1 + r)$  e reagrupando os termos em  $c_1$  e  $c_2$  de um lado:

$$c_2 = W_2 + (1 + r)W_1 - (1 + r)c_1$$

$$\Rightarrow (1 + r) c_1 + c_2 = (1 + r) W_1 + W_2$$

Esta é a restrição intertemporal em **valor futuro**: tudo medido em euros do período 2.

## 4 Passo 4: Passar Para Valor Presente

Dividindo tudo por  $(1 + r)$ :

$$c_1 + \frac{c_2}{1 + r} = W_1 + \frac{W_2}{1 + r}$$

Chamamos  $W$  ao lado direito, o **valor presente da riqueza** da Maria (o mesmo  $W$  de sempre, agora com um segundo período):

$$W = W_1 + \frac{W_2}{1 + r}$$

## Ligando ao Que Já Conhecemos

Repara na forma da restrição:  $c_1 + \frac{c_2}{1+r} = W$ .

Compara com a restrição estática de sempre:  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = W$ .

São **a mesma equação**, com  $x_1 \rightarrow c_1$ ,  $x_2 \rightarrow c_2$ ,  $p_1 = 1$ ,

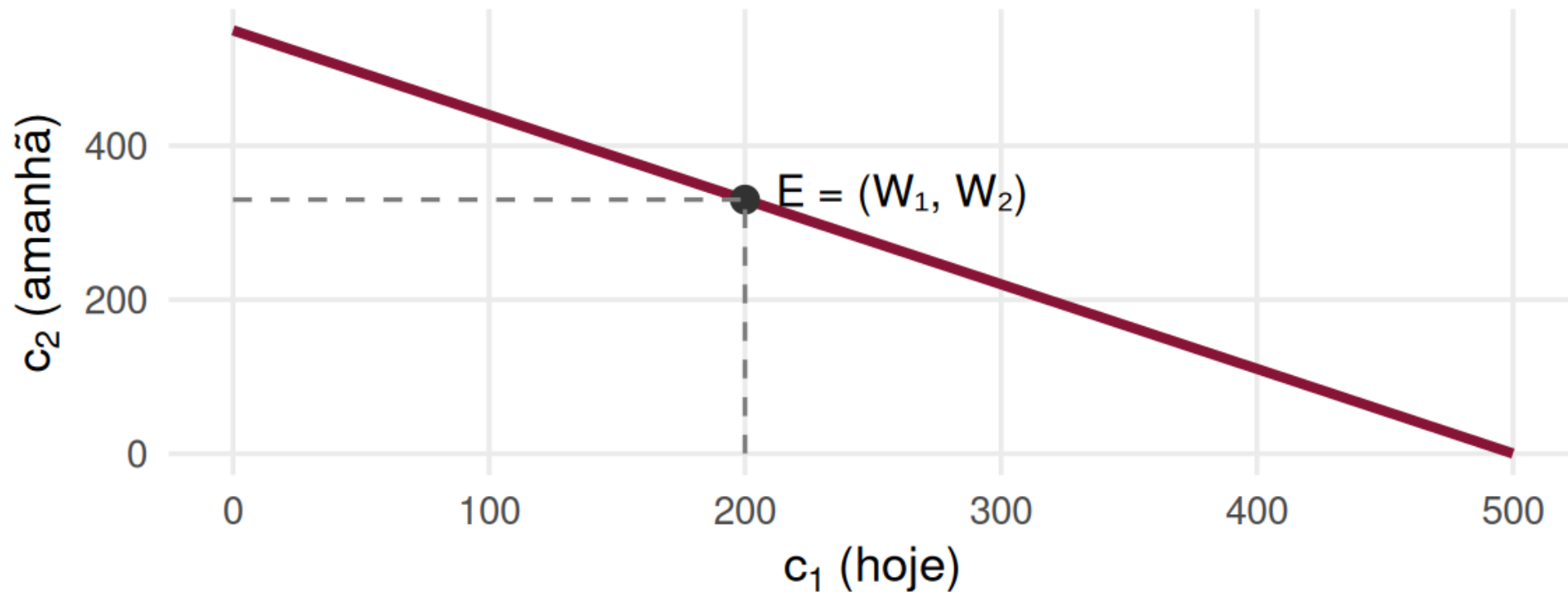
$p_2 = \frac{1}{1+r}$ : é o mesmo  $W$  de sempre, só que agora soma dois períodos. 

Nada na matemática muda. Só a interpretação: o “preço” do consumo de amanhã, em euros de hoje, é  $\frac{1}{1+r}$ : o fator de desconto.



# O Diagrama de Fisher

Representamos  $c_1$  no eixo horizontal e  $c_2$  no eixo vertical, tal como fazíamos com  $x_1$  e  $x_2$ .



O ponto  $E = (W_1, W_2)$ , a **dotação**, é o que a Maria consumiria sem banco nenhum.

## A Dotação Está Sempre na Reta

Repara: se  $c_1 = W_1$ , a restrição dá  $c_2 = W_2$  exatamente, **qualquer que seja  $r$** .

Faz sentido: consumir exatamente o que se recebe em cada período não exige poupar nem pedir emprestado nada. É sempre uma opção disponível. 

Vamos usar este facto simples daqui a pouco: ele é a chave para perceber os efeitos de uma mudança em  $r$ .



## O Declive da Reta

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = W \quad \Rightarrow \quad c_2 = (1+r)W - (1+r)c_1$$

O declive é  $-(1+r)$ : exatamente como  $-p_1/p_2$  na restrição estática, com  $p_1 = 1$  e  $p_2 = 1/(1+r)$ .

Interpretação: para consumir 1 euro a mais **hoje**, é preciso desistir de  $(1+r)$  euros **amanhã**. É o custo de oportunidade de gastar hoje em vez de poupar. 💡

## Poupar vs. Pedir Emprestado

Mover-se ao longo da reta, a partir de  $E$ :

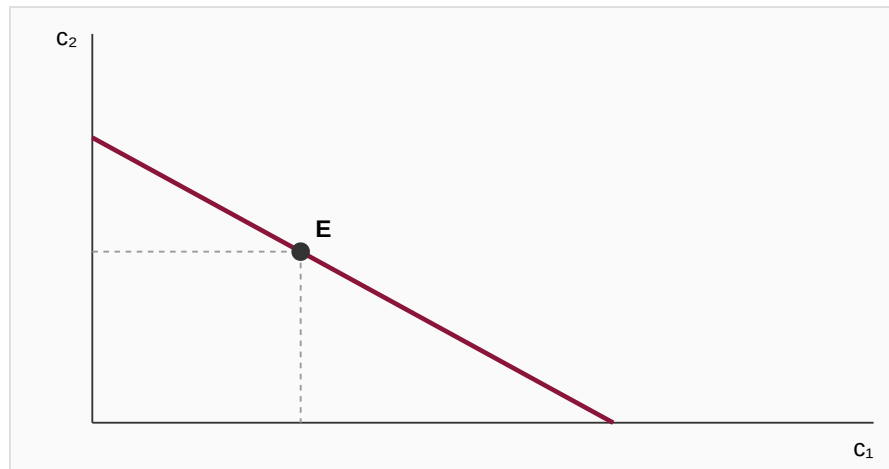
- Para a **esquerda** de  $E$  ( $c_1 < W_1$ ): a Maria consome menos hoje do que recebe. É **poupadora** ( $S = W_1 - c_1 > 0$ ).
- Para a **direita** de  $E$  ( $c_1 > W_1$ ): a Maria consome mais hoje do que recebe. É **devedora** ( $S < 0$ ).

O banco não muda o rendimento da Maria. Só lhe dá mais opções: pontos na reta que não são  $E$ . 



# Experimenta: A Reta Orçamental

Arrasta  $W_1$ ,  $W_2$  e  $r$  e vê a reta e a dotação mudarem. 



$W_1$ : 200



$W_2$ : 330



$r$ : 10%



$W$  (valor presente) = **500.0**

## Questões de Revisão (Parte 1)

### Pergunta 1

A restrição orçamental intertemporal  $c_1 + \frac{c_2}{1+r} = W$  é estruturalmente igual a:

- a.  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = W$ , com  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 1/(1+r)$
- b.  $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$
- c.  $|\text{TMS}| = p_1/p_2$
- d.  $Q^D = a - bP$

## ✓ Pergunta 1 (Solução)

### 💡 Solução

**Resposta: a)** A restrição intertemporal é a restrição orçamental estática do costume, com  $c_1, c_2$  no lugar de  $x_1, x_2$  e  $1/(1 + r)$  como o “preço” do consumo futuro.

## Pergunta 2

O ponto de dotação  $E = (W_1, W_2)$ :

- a. Só está na reta orçamental se a Maria poupar
- b. Desaparece se o banco fechar
- c. Está sempre na reta orçamental, qualquer que seja  $r$
- d. É sempre o ponto ótimo escolhido

**Resposta: c)** Consumir exatamente  $(W_1, W_2)$  nunca exige poupar nem pedir emprestado, por isso é sempre uma opção admissível.

### Pergunta 3 (Exercício)

A Mariana tem  $W_1 = 400$  euros e  $W_2 = 220$  euros. A taxa de juro é  $r = 10\%$ .

- a) Calcule a riqueza presente  $W$ .
- b) Qual o máximo que pode consumir em cada período?
- c) Se a Mariana decide consumir  $c_1 = 300$  euros hoje, quanto poupa? E quanto consome amanhã?

## ✓ Pergunta 3 (Solução)

### 💡 Solução

a)  $W = 400 + \frac{220}{1,10} = 400 + 200 = 600$  euros.

b) Máximo hoje:  $c_1^{\max} = 600$  euros. Máximo amanhã:  $c_2^{\max} = 600 \times 1,10 = 660$  euros.

c) Poupa  $S = 400 - 300 = 100$  euros. Amanhã:  $c_2 = 220 + 100 \times 1,10 = 330$  euros.

# Parte 2: A Escolha Ótima ao Longo do Tempo



## A Utilidade Depende do Tempo

Se  $U(x_1, x_2)$  mede a satisfação de consumir dois bens,  $U(c_1, c_2)$  mede a satisfação de consumir num período ou noutro.

O método é o mesmo (curvas de indiferença, TMS, tangência).  
Só trocámos os rótulos: onde líamos “pizza e salada”, lemos agora “hoje e amanhã”. Falta escolher uma forma de  $U$  que leia bem o tempo.   



## Uma Utilidade Feita Para o Tempo

Para bens no mesmo instante usámos a Cobb-Douglas. Para consumo em dois momentos há uma forma ainda mais natural: **somar** a satisfação de cada período, **descontando** o futuro.

*i* Utilidade intertemporal

$$U(c_1, c_2) = \ln c_1 + \beta \ln c_2, \quad \beta > 0$$

$\ln$  é a satisfação de consumir em cada período (com utilidade marginal decrescente, como sempre).  $\beta$  pesa o **futuro** em relação ao presente.

## É Uma Cobb-Douglas Disfarçada

A utilidade é ordinal, e  $\exp$  é uma função crescente. Aplicando  $\exp$  à nossa  $U$ :

$$e^U = e^{\ln c_1 + \beta \ln c_2} = c_1 \cdot c_2^\beta$$

É uma **Cobb-Douglas** com expoentes 1 e  $\beta$ . Logo  $\ln c_1 + \beta \ln c_2$  representa exatamente as mesmas preferências que  $c_1^1 c_2^\beta$ . 

Podemos reutilizar tudo o que já sabemos da Cobb-Douglas. A forma logarítmica só torna a leitura do tempo mais transparente.



## O Que Significa $\beta$ ?

$\beta$  é o **fator de desconto**: quanto vale, hoje, uma unidade de satisfação de amanhã.

- $\beta < 1$ : **impaciente**. Damos menos peso ao futuro, 1 euro amanhã vale menos do que 1 euro hoje. É o caso normal: quase toda a gente prefere já.
- $\beta = 1$ : indiferente entre hoje e amanhã.
- $\beta > 1$ : **paciente**, valoriza mais o futuro (raro).

Por isso, tipicamente  $\beta \in (0, 1]$ . 💡



# O Problema do Consumidor, Agora no Tempo

## ! O Problema do Consumidor Intertemporal

$$\max_{c_1, c_2} \ln c_1 + \beta \ln c_2 \quad \text{sujeito a} \quad c_1 + \frac{c_2}{1+r} = W$$

A restrição é a de sempre, com  $p_1 = 1$  e  $p_2 = 1/(1+r)$ .

Resolvemos como na aula anterior: pela **tangência**, a 2ª lei de Gossen. 

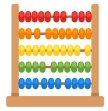
## Resolver com a 2ª Lei de Gossen

A TMS desta utilidade: como  $UMg_1 = \frac{1}{c_1}$  e  $UMg_2 = \frac{\beta}{c_2}$ ,

$$|TMS| = \frac{UMg_1}{UMg_2} = \frac{c_2}{\beta c_1}$$

A tangência iguala  $|TMS|$  ao declive da reta (em valor absoluto),  
 $p_1/p_2 = 1 + r$ :

$$\frac{c_2}{\beta c_1} = 1 + r \quad \implies \quad c_2 = \beta(1 + r) c_1$$



## Juntar à Restrição

Substituindo  $c_2 = \beta(1 + r) c_1$  na restrição  $c_1 + \frac{c_2}{1 + r} = W$ :

$$c_1 + \underbrace{\frac{\beta(1 + r) c_1}{1 + r}}_{= \beta c_1} = W \quad \implies \quad (1 + \beta) c_1 = W$$

$$c_1^* = \frac{W}{1 + \beta}$$

$$c_2^* = \frac{\beta(1 + r) W}{1 + \beta}$$



## As Procuras Intertemporais

**i** Consumo ótimo em cada período

$$c_1^* = \frac{W}{1 + \beta}$$

$$c_2^* = \frac{\beta(1 + r) W}{1 + \beta}$$

onde  $W = W_1 + \frac{W_2}{1 + r}$

A fração da riqueza gasta hoje é  $\frac{1}{1 + \beta}$ : quanto mais impaciente (menor  $\beta$ ), mais se consome no presente.

## 1 2 3 4 Exemplo Numérico

$W_1 = 200$ ,  $W_2 = 330$ ,  $r = 10\%$ ,  $\beta = 0,25$  (bastante impaciente).

$$W = 200 + \frac{330}{1,10} = 200 + 300 = 500$$

$$c_1^* = \frac{500}{1,25} = 400 \quad c_2^* = \frac{0,25 \times 1,10 \times 500}{1,25} = 110$$

$c_1^* = 400 > W_1 = 200$ : a Maria consome muito mais do que recebe hoje. É **devedora**, pede emprestado

$S = 200 - 400 = -200$  euros. 



# A Condição Escondida de Euler

Reescreve a tangência  $\frac{c_2}{\beta c_1} = 1 + r$  isolando o **crescimento do consumo**:

$$\boxed{\frac{c_2}{c_1} = \beta (1 + r)}$$

Duas forças em luta, impaciência ( $\beta$ ) contra juro ( $1 + r$ ):

- $\beta(1 + r) > 1$ : o **juro** vence,  $c_2 > c_1$  (consumo cresce).
- $\beta(1 + r) < 1$ : a **impaciência** vence,  $c_2 < c_1$  (consumo diminui).
- $\beta(1 + r) = 1$ : empate,  $c_1 = c_2$ .

# **Poupadora ou Devedora? Depende de $\beta$**

Comparamos  $c_1^* = \frac{W}{1 + \beta}$  com  $W_1$ .

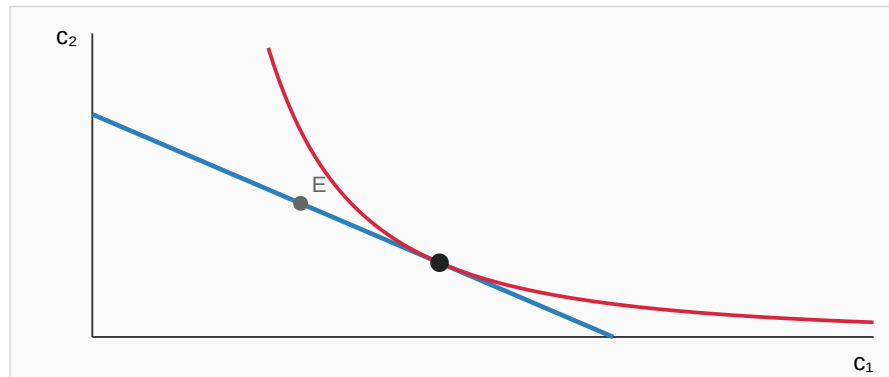
- Se  $\frac{W}{1 + \beta} < W_1$ : a Maria é **poupadora**.
- Se  $\frac{W}{1 + \beta} > W_1$ : a Maria é **devedora**.

Quanto mais **impaciente** (menor  $\beta$ ), maior  $c_1^*$ , mais provável que peça emprestado para trazer consumo para o presente. Quanto mais **paciente** (maior  $\beta$ ), mais provável que poupe. 



# Experimenta: A Escolha Ótima

Arrasta os parâmetros. A curva de indiferença passa sempre pelo ponto ótimo. 



$\beta$  (paciência): 0.50



$r$ : 10%



$W_1$ : 200



$W_2$ : 330



$c_1^* = 333.3$   $c_2^* = 183.3$  **Devedora ( $S = -133.3$ )**



## O Que Acontece Quando $r$ Aumenta?

Uma subida de  $r$  é, ao mesmo tempo, uma mudança de **preço relativo** (o “preço” de  $c_2$ ,  $1/(1 + r)$ , diminui) e uma mudança de **riqueza**.

Aqui aparece uma ideia nova: qualquer mudança de preço traz sempre **dois efeitos** ao mesmo tempo, um **efeito substituição** e um **efeito rendimento**. Vamos conhecê-los agora, com uma vantagem: neste problema o efeito rendimento é **quase óbvio de ver**. 🙄

## A Reta Roda em Torno de $E$

Lembra:  $E = (W_1, W_2)$  está **sempre** na reta orçamental, seja qual for  $r$ .

Logo, quando  $r$  aumenta, a reta não se desloca livremente: ela **roda em torno de  $E$** , ficando mais inclinada (mais negativa).

Isto é diferente do problema estático: lá, quando  $p_1$  muda, a reta roda em torno de uma interceção **abstrata** ( $W/p_2$ , uma quantidade que ninguém possui). Aqui, roda em torno de um ponto **real**: o que a Maria já tem. 



## Quem Ganha e Quem Perde

Se a reta roda em torno de  $E$  e fica mais inclinada, o que acontece aos dois lados de  $E$ ?

**À esquerda de  $E$**  (onde estão os poupadores): a nova reta passa **por cima** da antiga. Todas as escolhas de antes continuam disponíveis, e aparecem escolhas novas e melhores.

**À direita de  $E$**  (onde estão os devedores): a nova reta passa **por baixo** da antiga. Algumas escolhas de antes deixam de estar disponíveis.

Sem calcular nada, só de olhar para o gráfico: **poupadores ganham, devedores perdem** com uma subida de  $r$ . 💡

## ✓ Confirmação Sem Cálculo: A Devedora do Exemplo

A Maria do exemplo ( $\beta = 0,25$ ,  $W_1 = 200$ ,  $W_2 = 330$ ) escolheu  $(c_1^*, c_2^*) = (400, 110)$  a  $r = 10\%$ . É devedora.

Se  $r$  aumentar para 20%, será que ainda pode pagar por  $(400, 110)$ ?

$$400 + \frac{110}{1,20} = 400 + 91,67 = 491,67$$



## A Devedora, Continuação

Mas a nova riqueza é só:

$$W = 200 + \frac{330}{1,20} = 475$$

Precisava de 491,67 mas só tem 475: **já não pode pagar a mesma escolha.** A devedora ficou pior. 

## ✓ Confirmação Sem Cálculo: Uma Poupadora

Agora um consumidor mais paciente,  $\beta = 1,5$ ,  $W_1 = 300$ ,  $W_2 = 220$ . A  $r = 10\%$ :  $W = 500$ ,  $c_1^* = 200$ ,  $c_2^* = 330$ . É poupador ( $S = 100$ ).

Se  $r$  aumentar para 20%, ainda pode pagar por (200, 330)?

$$200 + \frac{330}{1,20} = 200 + 275 = 475$$



## A Poupadora, Continuação

A nova riqueza é:

$$W = 300 + \frac{220}{1,20} = 483,33$$

Precisava só de 475 e tem 483,33: **sobra dinheiro**. O poupador ficou melhor. 



## Dois Efeitos: Substituição e Rendimento

**Efeito substituição:** consumir hoje fica sempre mais “caro” em termos de oportunidade quando  $r$  aumenta. Este efeito empurra sempre na mesma direção:  $c_1 \downarrow$ ,  $c_2 \uparrow$ , para **qualquer** consumidor.

**Efeito rendimento:** depende de ser poupador ou devedor, como acabámos de ver. Poupador fica mais rico ( $c_1$  tende a aumentar). Devedor fica mais pobre ( $c_1$  tende a diminuir).



## Resumindo os Dois Efeitos

|                 | Efeito Substituição | Efeito Rendimento             | Total em $c_1$                |
|-----------------|---------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| <b>Poupador</b> | $c_1 \downarrow$    | $c_1 \uparrow$ (mais rico)    | <b>Ambíguo</b>                |
| <b>Devedor</b>  | $c_1 \downarrow$    | $c_1 \downarrow$ (mais pobre) | $c_1 \downarrow$ <b>claro</b> |

Para o **devedor**, os dois efeitos apontam para o mesmo lado: o resultado é certo. Para o **poupador**, competem: o resultado depende de qual domina, mas sabemos pelo menos que ele não fica pior. 🔍



## Questões de Revisão (Parte 2)

### Pergunta 4

Com  $U = \ln c_1 + \beta \ln c_2$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $W_1 = 100$ ,  $W_2 = 220$ ,  $r = 10\%$ , qual é  $c_1^*$ ?

- a. 150
- b. 250
- c. 300
- d. 200

## ✓ Pergunta 4 (Solução)

### Solução

$$W = 100 + 220/1,10 = 100 + 200 = 300. c_1^* = \frac{W}{1 + \beta} = \frac{300}{1,5} = 200. \text{ Resposta: d)}$$

## Pergunta 5

Um consumidor devedor vê a taxa de juro aumentar. O que é certo acontecer?

- a.  $c_1$  aumenta, porque fica mais rico
- b.  $c_1$  diminui, porque efeito substituição e efeito rendimento apontam para o mesmo lado
- c.  $c_1$  mantém-se, os efeitos cancelam-se
- d. Passa a ser poupador

**Resposta: b)** Para um devedor, a subida de  $r$  reduz  $c_1$  tanto pelo efeito substituição como pelo efeito rendimento (fica mais pobre).

## Pergunta 6 (Exercício)

Um consumidor tem  $U = \ln c_1 + \beta \ln c_2$ ,  $\beta = 1,5$ ,  $W_1 = 300$ ,  $W_2 = 220$ ,  $r = 10\%$ .

- a) Calcule a riqueza presente  $W$ .
- b) Determine  $(c_1^*, c_2^*)$ .
- c) É poupador ou devedor? Quanto poupa ou pede emprestado?

## ✓ Pergunta 6 (Solução)

### 💡 Solução

a)  $W = 300 + \frac{220}{1,10} = 300 + 200 = 500$  euros.

b)  $c_1^* = \frac{W}{1 + \beta} = \frac{500}{2,5} = 200$ .  $c_2^* = \frac{1,5 \times 1,10 \times 500}{2,5} = 330$ .

c)  $c_1^* = 200 < W_1 = 300$ : é **poupador**, poupa  $S = 300 - 200 = 100$  euros hoje.

## ? E a Seguir?

Hoje aplicámos exatamente o mesmo método (a Cobb-Douglas e a tangência da 2ª lei de Gossen) a um problema novo: distribuir consumo **ao longo do tempo** em vez de entre bens.

Esta ferramenta reaparece sempre que se fala em poupança, crédito, ou avaliação de investimentos: o valor presente  $W$  é a mesma ideia que sustenta o cálculo de obrigações e de VAL em finanças. 



## Na Próxima Aula

Deixamos o consumidor e passamos para o outro lado do mercado, o **produtor**: como se decide quanto produzir, a partir da estrutura de custos.